

## 14 回転星の大気構造

太陽系、降着円盤、銀河系などでは、回転の効果が大いいために、全体として円盤状になっている。これらの天体ほどではなくても、惑星にせよ恒星にせよ天体の大部分は自転しており、そのため多かれ少なかれ自転による変形を受けている。ここでは、星の大気構造に与える回転の効果調べてみよう(図14・1)。

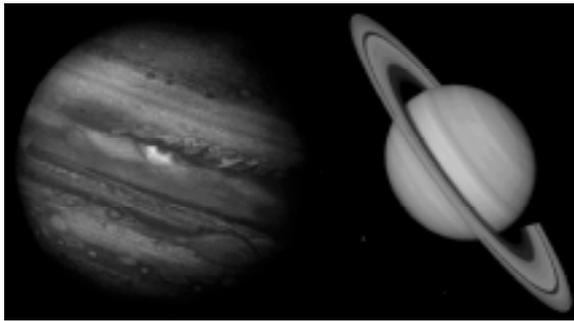


図 14.1 木星と土星 (NASA)

### 14.1 自転している天体

木星や太陽など、自転している星の具体例をいくつかあげておこう。

#### (1) 木星

木星は地球の10倍も大きいにもかかわらず、わずか10時間弱で自転している。それがため形状は赤道方向に膨れた偏平楕円体になっている。

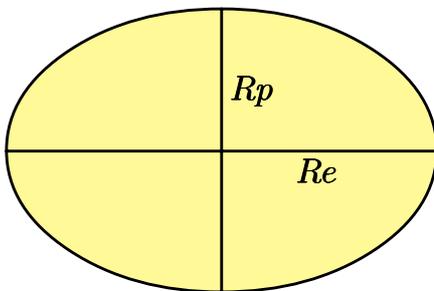


図 14.2 赤道半径  $R_e$  と極半径  $R_p$

具体的な数値として、まず形状に関する諸量を出してみよう。木星の赤道半径を  $R_e$ 、極

半径を  $R_p$  とすると(図14・2)これらは、それぞれ、

$$R_e = 7.15 \times 10^4 \text{ km} \quad (14.1)$$

$$R_p = 6.68 \times 10^4 \text{ km} \quad (14.2)$$

である。形状の扁平度を表す指標として、長軸の長さ $a$ と短軸の長さ $b$ の差を長軸の長さ $a$ で割ったものを考え、偏平率(ellipticity)を定義する。完全な円では偏平率は0だが、木星の偏平率  $\epsilon$  は、

$$\epsilon \equiv \frac{R_e - R_p}{R_e} = 0.065 \quad (14.3)$$

になる。

また、木星の質量  $M_J$  は、 $M_{\oplus}$  ( $= 5.98 \times 10^{27} \text{ g}$ ) を地球の質量として、

$$M_J = 317.83 M_{\oplus} \quad (14.4)$$

である。したがって、木星の平均密度  $\bar{\rho}_J$  は、

$$\bar{\rho}_J = 1.33 \text{ g cm}^{-3} \quad (14.5)$$

になる。さらに、木星の組成は、おおよそ、水素分子  $\text{H}_2$  が89%、ヘリウム  $\text{He}$  が11%である。

なお、木星の自転周期は、場所によって若干違うが、以下の3つがよく使われる。

表 14.1 木星の自転周期		
システム I	赤道域	$9^{\text{h}}50^{\text{m}}30^{\text{s}}$
システム II	中緯度	$9^{\text{h}}55^{\text{m}}40.6^{\text{s}}$
システム III	固体核	$9^{\text{h}}55^{\text{m}}29.37^{\text{s}}$

#### (2) 土星

土星も地球の10倍近く大きいのに、やはり、わずか10時間ほどで自転している。そして木星と同様、形状は赤道方向に膨れた偏平楕円体になっている。

まず形状に関する諸量としては、土星の赤道半径を  $R_e$ 、極半径を  $R_p$  とすると、それぞれ、

$$R_e = 6.03 \times 10^4 \text{ km} \quad (14.6)$$

$$R_p = 5.38 \times 10^4 \text{ km} \quad (14.7)$$

である。したがって、土星の偏平率  $\epsilon$  は、

$$\epsilon = \frac{R_e - R_p}{R_e} = 0.108 \quad (14.8)$$

になる(かなり大きい)

また土星の質量  $M_S$  は、

$$M_S = 95.16 M_{\oplus} \quad (14.9)$$

で、したがって平均密度  $\bar{\rho}_S$  は、

$$\bar{\rho}_S = 0.69 \text{ g cm}^{-3} \quad (14.10)$$

になる(水より小さい!) さらに、土星の組成は、おおよそ、水素分子  $H_2$  が 90%、ヘリウム  $He$  が 10% である。

なお、土星の自転周期も、場所によって若干異なる。

表 14.2 土星の自転周期

赤道域	$10^{\text{h}14^{\text{m}}}$
中緯度	$10^{\text{h}39^{\text{m}}}$
固体核	$10^{\text{h}39.9^{\text{m}}}$

### (3) 太陽

太陽も約 1ヶ月ぐらいで自転している(図 14.3)。しかも自転の度合いは、太陽の赤道から測った緯度によって異なり、赤道ではやや早くて 27日ぐらいで自転しているが、極に向かうほど自転速度は遅くなり、極付近では 30日以上かかって自転している。ただし、太陽の場合、自転の度合いはあまり大きくないので、太陽の形状の球形からのずれはほとんどない。

### (4) 高速自転星

主系列星の中でみると、太陽のような表面温度が低温の星に比べ、高温星の自転速度は比較的大きいことが知られている(図 14.4)。具体的には、スペクトル型が G 型の太陽の自転速度が  $2 \text{ km s}^{-1}$  ほどなのに対し、B 型から A 型の星の自転速度はしばしば  $100 \text{ km s}^{-1}$  前後もある。とくに、B 型星の一部で B 型輝線星と呼ばれる星では、自転速度が  $200 \sim 300 \text{ km s}^{-1}$  にもなる。そのため、これらの星は高速自転星と呼ばれている。表面温度が高温の星が高速で自転している原因(あるいは

表面温度が低温の星の自転速度が小さくなった理由)はまだよくわかっていない。

問 14.1 木星と土星とでは自転周期はほとんど同じなのに、土星の方が木星より偏平率が大きい理由は何故だろうか?

## 14.2 回転星の大気モデル

回転星の大気は本質的に 2 次元的な構造になっているので、太陽コロナで考えたような、半径方向 1 次元といった単純な取り扱いはできない。しかし、以下のように、ポテンシャルを用いれば、回転星の大気構造を比較的容易に調べることができる。

### 14.2.1 静水圧平衡

回転星の大気中の各点では、星の物質による重力、回転に伴う遠心力、そしてガスの圧力勾配力の 3 つの力が働いている(図 14.3)。回転星の大気で強い対流などがなく、放射や磁場などの力が働いていなければ、大気中の各点ではこれらの 3 つの力が釣り合った静水圧平衡の状態になっていると考えることができる。静水圧平衡における力の釣り合いをベクトル的に書くと、

$$-\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{g} + \mathbf{g}_c = 0 \quad (14.11)$$

のように表せる。ただし  $\nabla$  (ナブラ) はベクトル演算子で、また  $\mathbf{g}$  は重力加速度(単位質量あたりの重力)、 $\mathbf{g}_c$  は遠心力加速度(単位質量あたりの遠心力)である。

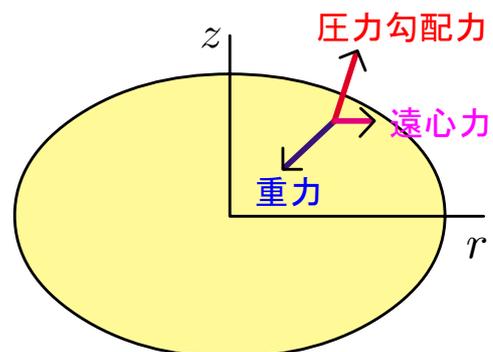


図 14.3 回転星の大気で働く 3 つの力

まず最初の圧力勾配力についてだが、回転星の自転軸を  $z$  とする円筒座標系  $(r, \varphi, z)$  では、圧力勾配力の成分は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \nabla P &= \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}, \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \varphi}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \right) \\ &= \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}, 0, \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (14.12)$$

と表わすことができる。ただし回転対称性から、 $\varphi$ -成分は 0 とした。

つぎに重力場だが、簡単のために、回転星の質量は中心核に集中しており、回転星の大気は十分希薄で、したがって大気中の重力場は中心核の重力場で近似できるとしよう(すなわち中心核の質量に比べ大気を無視する)。中心核の質量を  $M$ 、中心からの距離を  $R(= \sqrt{r^2 + z^2})$  とすると、大気中のある点における重力(加速度)の強さは  $GM/R^2$  で、これは中心方向を向いている(図 14・3)。半径方向の成分は、これに  $r/R$  をかけたものになり、また鉛直方向の成分は  $z/R$  をかけたものになる。したがって重力加速度  $g$  の成分表示は、

$$g = \left( -\frac{GMr}{R^3}, 0, -\frac{GMz}{R^3} \right) \quad (14.13)$$

となる。

最後に遠心力だが、大気全体が角速度  $\Omega$  で一様回転しているとすると、遠心力(加速度)  $r\Omega^2$  は半径方向のみに働く(図 14・5)。したがって、遠心力加速度  $g_c$  の成分表示は、

$$g_c = (r\Omega^2, 0, 0) \quad (14.14)$$

となる。

以上を合わせると、静水圧平衡の式(14.11)の半径方向と鉛直方向の成分は、

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{GMr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} + r\Omega^2 \quad (14.15)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{GMz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (14.16)$$

と表される(回転対称性から回転角方向は  $0 = 0$  という自明な式になる)。これに状態方程式:

$$P = K\rho^\gamma; \quad K \text{ と } \gamma \text{ は定数} \quad (14.17)$$

を加えたものが、回転星の構造を決める基本方程式になる。

上の力学的釣り合いの式からすぐわかることは、回転星の半径に最大半径が存在することである。回転星の質量  $M$  と回転の角速度  $\Omega$  が決まっているとしよう。このとき回転星の大気が膨らんで半径が大きくなっていくと、表面付近での重力は(中心からの距離の 2 乗に反比例して)小さくなる一方、(半径に比例する)遠心力は次第に大きくなる。この効果は赤道面でもっとも顕著であり、回転星の半径がある値までなると、ついには赤道面で遠心力の方が大きくなり、ガスは遠心力によって赤道付近から周辺に流れ出すのだ。これをブレイクアップ(breakup)と呼んでいる。たとえば、B 型輝線星のような高速自転星では、星の周辺にガスの円盤が存在することが観測されている。B 型輝線星では、赤道面でブレイクアップを起こしており、星の赤道から大気ガスが放出されて、それが星周ガス円盤となっているのかもしれない。

問 14.2 回転星の質量  $M$  と回転の角速度  $\Omega$  が与えられたときの、赤道面におけるブレイクアップの条件を求めよ。またその条件から、回転星の最大半径  $r_{\max}$  が  $M$  と  $\Omega$  で、

$$r_{\max} = (GM/\Omega^2)^{1/3} \quad (14.18)$$

となることを示せ。

### 14.2.2 有効ポテンシャル

静水圧平衡の式:(14.15)式と(14.16)式は、ここで考えている回転星の大気構造を表す式ではあるが、これらの式自体から構造を求めるのは難しい。しかし、これらの式を積分してポテンシャルを求めると、それから大気構造を知ることが容易にできる。そこで、状態方程式(14.17)の助けを借りながら、静水圧平衡の式を積分していこう。

まず(14.17)式を  $z$  方向の(14.16)式に代入すると、

$$K\gamma\rho^{\gamma-2} \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\frac{GMz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (14.19)$$

となるが、左辺が  $\frac{K\gamma}{\gamma-1} \frac{\partial}{\partial z} \rho^{\gamma-1}$  と変形できることに注意しながら、 $r$  を固定して  $z$  に関して積分すると、

$$\frac{K\gamma}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} = \frac{GM}{\sqrt{r^2+z^2}} + f(r) \quad (14.20)$$

となる。ただし、積分定数に相当する  $f(r)$  は、今の場合、 $r$  の任意関数である。

つぎに、上の (14.20) 式を  $r$  で偏微分すると、

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{GMr}{(r^2+z^2)^{3/2}} + \frac{df}{dr} \quad (14.21)$$

となり、 $r$  方向の (14.15) 式と比較することにより、 $f(r)$  を決める微分方程式：

$$\frac{df}{dr} = r\Omega^2 \quad (14.22)$$

が得られる。この微分方程式を  $r$  に関して積分すると、

$$f(r) = \frac{\Omega^2}{2} r^2 + \text{積分定数} \quad (14.23)$$

となる。

以上をまとめると、静水圧平衡を積分した式は、結局、

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} = \frac{GM}{\sqrt{r^2+z^2}} + \frac{\Omega^2}{2} r^2 + \text{積分定数} \quad (14.24)$$

となり、あるいは、綺麗な形に整理すると、

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} + \phi_{\text{eff}} = \text{一定} \quad (14.25)$$

と表せる<sup>1</sup>。ただしここで、

$$\phi_{\text{eff}} = -\frac{GM}{\sqrt{r^2+z^2}} - \frac{\Omega^2}{2} r^2 \quad (14.26)$$

は、重力ポテンシャル  $-GM/\sqrt{r^2+z^2}$  と遠心力ポテンシャル  $-\Omega^2 r^2/2$  を合わせたもので、

<sup>1</sup>この整理は、変数を別の変数に置き換えているだけのように見えるかもしれないが、バラバラだった積分項を有効ポテンシャルという形にまとめあげることによって、まず、一般性・拡張性が非常に高くなる。また審美的にも、有効ポテンシャルで整理された形の方が式が美しくなる。最後に、物理的にも意味のある有効ポテンシャルで議論する方が、以下見るように、はるかに見通しがよくなるのである。

有効ポテンシャル (effective potential) と呼ばれるものだ。

さてそこで、(14.25) 式の右辺の定数の物理的意味を考えてみよう。この定数項はもともとは積分によって生じた積分定数であり、もとの微分方程式の境界条件によって決まる項である。現在の問題での境界条件は、回転星の表面でガス密度が 0 になるという条件が適当である。表面のどこでもいいのだが、簡単のために赤道で条件を課そう。回転星の赤道半径を  $r_e$  とすると、境界条件は、

$$r = r_e, z = 0 \quad \text{で} \quad \rho = 0 \quad (\text{したがって } P/\rho = 0) \quad (14.27)$$

と表せる。この境界条件を (14.25) 式に入れると、最終的に、

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} + \phi_{\text{eff}} = \phi_e \quad (14.28)$$

が得られる。ただしここで、

$$\phi_e = -\frac{GM}{r_e} - \frac{\Omega^2}{2} r_e^2 \quad (14.29)$$

は有効ポテンシャル  $\phi_{\text{eff}}$  の赤道面での値である。またこのとき密度分布は、

$$\rho = \left[ \frac{\gamma-1}{K\gamma} (\phi_e - \phi_{\text{eff}}) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (14.30)$$

となる。

有効ポテンシャル  $\phi_{\text{eff}}$  は、(14.25) 式からもわかるように、動径  $r$  と高さ  $z$  の関数だ。したがって、有効ポテンシャルの値が一定の点を結ぶと、その点は空間内である図形を描くことになる。このような有効ポテンシャルが等しい点を結んでできる面を等ポテンシャル面 (equi-potential surface) と呼んでいる (具体的な形は後で出てくる)。ところで、上の (14.30) 式からは、明らかに、有効ポテンシャルが一定の面で密度も (また圧力も) 一定になる。すなわち、今の場合、等ポテンシャル面と等密度面 (equi-density surface) および等圧面 (equi-pressure surface : isobar) はすべて一致するのだ<sup>2</sup>。したがって、有効ポテン

<sup>2</sup>正確に言えば、等ポテンシャル面と等密度面と等圧面が平行であるということの意味しており、面の形状は同じ形になるが、値自体や変化幅は一般に異なる。

シャルを調べて等ポテンシャル面の形状を求めれば、同時に、密度分布など大気の構造がわかることになるのである。

等ポテンシャル面の2次元的な形状はすぐつぎに考えるが、その前に、赤道面におけるポテンシャルの概形を見ておこう(図14.4)。赤道面( $z = 0$ )での有効ポテンシャルは、

$$\phi_{\text{eff}}|_{z=0} = -\frac{GM}{r} - \frac{\Omega}{2}r^2 \quad (14.31)$$

である。重力ポテンシャル(右辺第1項)は、図に示したように、中心で深く遠方で浅くなる。一方、遠心力ポテンシャル(右辺第2項)は、逆に、中心で0だが遠方で深くなる。その結果、両方を合わせた有効ポテンシャルは、ある半径  $r_{\text{max}}$  で極大値  $\phi_{\text{max}}$  を持つことになる。この半径は、 $\partial\phi_{\text{eff}}/\partial r$  となる半径であり、実は、先に出てきたブレイクアップを起こす半径に他ならない。

物理的なイメージとしては、回転星の大気は、重力と遠心力でできた有効ポテンシャルという容器の中に溜まっているのだが、その量が増えてくると半径が大きくなり、ついには容器の縁(有効ポテンシャルの極大値)を越えて溢れ出すのである。

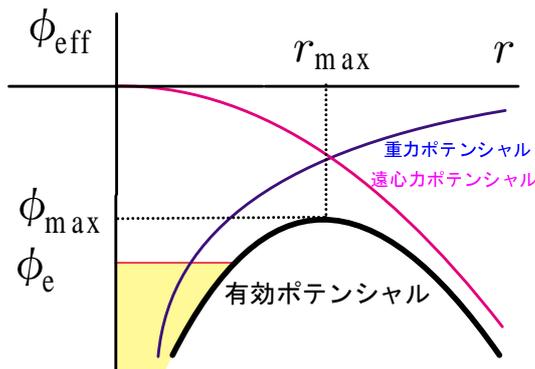


図 14.4 赤道面での有効ポテンシャルの概形

問 14.3 有効ポテンシャルを用いると、静水圧平衡の式が、

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{\partial \phi_{\text{eff}}}{\partial r} \quad (14.32)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{\partial \phi_{\text{eff}}}{\partial z} \quad (14.33)$$

と表せることを示せ。

問 14.4 密度分布が(14.30)式のようなことを導け。

問 14.5 圧力分布を求めよ。

問 14.6 ブレイクアップのときの有効ポテンシャル、すなわち赤道面における有効ポテンシャルの極大値  $\phi_{\text{max}}$  を求めよ。

### 14.2.3 無次元化

等密度面や等圧面は等ポテンシャル面に平行なので等ポテンシャル面の形がわかれば、(14.30)式から回転星の大気構造がわかることになる。しかし有効ポテンシャルの(14.26)式は、このままでは、中心核の質量  $M$  や自転角速度  $\Omega$  などが入っていて扱いにくい。質量や角速度をいちいち与えなければならないし、また出てきた結果は他の質量や角速度をもつ場合には使えないので汎用性に乏しい。さらに非常に大きな値や小さな値を計算しなければならない。そこで、今の場合、具体的には以下のような無次元化を行おう。

まず長さの単位としては、回転星のサイズを選びたい。その一つとして、回転星の赤道半径  $r_e$  があるが、赤道半径は(ガスの量によって)変化するので適当ではない。それよりも、回転星の質量と自転角速度を与えれば決まるブレイクアップの半径  $r_{\text{max}} [= (GM/\Omega^2)^{1/3}]$  が適当である。またポテンシャルの単位としては、(14.26)の第2項を見ると、 $\Omega^2 r_{\text{max}}^2$  ぐらいを取るのがわかりやすいだろう。

以上の考察より、無次元化した変数として、

$$\hat{r} = \frac{r}{r_{\text{max}}} = \frac{r}{(GM/\Omega^2)^{1/3}} \quad (14.34)$$

$$\hat{z} = \frac{z}{r_{\text{max}}} = \frac{z}{(GM/\Omega^2)^{1/3}} \quad (14.35)$$

$$\hat{\phi}_{\text{eff}} = \frac{\phi_{\text{eff}}}{\Omega^2 r_{\text{max}}^2} = \frac{\phi_{\text{eff}}}{(GM/\Omega^2)^{2/3}} \quad (14.36)$$

を選ぼう。これらを(14.26)式に代入して整理すると、

$$\hat{\phi}_{\text{eff}} = -\frac{1}{\sqrt{\hat{r}^2 + \hat{z}^2}} - \frac{\hat{r}^2}{2} \quad (14.37)$$

というすっきりした式に落ち着く。この(14.37)式が無次元化した回転星大気の有効ポテンシャルである。

問 14.7 無次元化した量で、ブレイクアップのときの赤道半径を  $\hat{r}_{\max}$ 、極半径を  $\hat{z}_{\max}$ 、そして表面での有効ポテンシャルを  $\hat{\phi}_{\max}$  とする。このとき、

$$\begin{aligned}\hat{r}_{\max} &= 1 \\ \hat{\phi}_{\max} &= -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

となることを確かめよ。また表面での有効ポテンシャルの値が等しいことを使って、

$$\hat{z}_{\max} = \frac{2}{3}$$

となることを求めよ。

この問からわかるように、ブレイクアップするときの偏平率  $\epsilon$  は、

$$\epsilon = \frac{r_{\max} - z_{\max}}{r_{\max}} = \frac{1}{3} \quad (14.38)$$

である。これは質量や自転角速度によらない。

いろいろなポテンシャルの値を与えて等ポテンシャル面を描くと、図 14・5 のようになる。

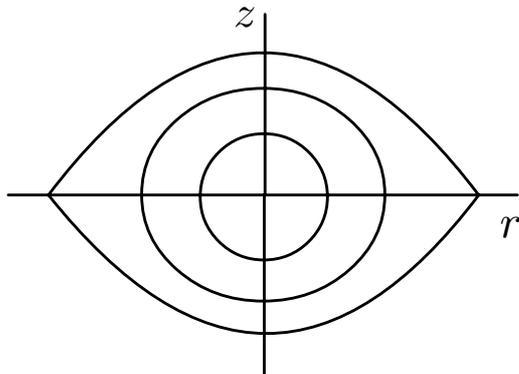


図 14.5 無次元化した等ポテンシャル面

問 14.8 無次元化した等ポテンシャル面を描いてみよ。

問 14.9 無次元化の方法は一意的ではない。例えば、ポテンシャルの単位として、 $GM/r_{\max}$  を選んだらどうなるだろうか？

#### 14.2.4 応用例

以上の回転星の大気モデルを木星に適用してみよう。

木星の赤道半径を  $R_e$ 、質量を  $M_J$ 、自転角速度を  $\Omega_J (= 2\pi/P_J; P_J$  は自転周期) とする。最初にあげた具体的数値を用いると、まず無次元化した赤道半径  $\hat{r}_e$  は、

$$\begin{aligned}\hat{r}_e &= \frac{R_e}{(GM_J/\Omega_J^2)^{1/3}} \\ &= \frac{R_e}{(GM_J P_J^2/4\pi^2)^{1/3}} \\ &= 0.44856\end{aligned} \quad (14.39)$$

となる(自転周期は、 $P_J = 9^{\text{h}}50^{\text{m}}30^{\text{s}}$  を用いた)。またそこでの有効ポテンシャル  $\hat{\phi}_e$  は、

$$\hat{\phi}_e = -\frac{1}{\hat{r}_e} - \frac{\hat{r}_e^2}{2} = -2.330 \quad (14.40)$$

になる。

このとき、モデル回転星の無次元化した極半径  $\hat{z}_p$  は、

$$\hat{z}_p = -\frac{1}{\hat{\phi}_e} = 0.42919 \quad (14.41)$$

である。したがって、モデル回転星の偏平率  $\epsilon$  は、

$$\epsilon = \frac{r_e - z_p}{r_e} = 0.0432 \quad (14.42)$$

になる。一方、木星の観測された偏平率は、0.065 だった。非常に荒い議論としてはいい一致を見たというべきだろう。

問 14.10 土星の場合について、同じ作業をしてみよ。

コラム：

## 15 近接連星の形状

2つの星がお互いのまわりを回りあっている連星の中でも、とくに、2つの星が極めて接近して公転している系を、近接連星 (close binary) あるいは近接連星系 (close binary system) という (図 15・1)。ここでは、そのような連星の形を考えてみよう。

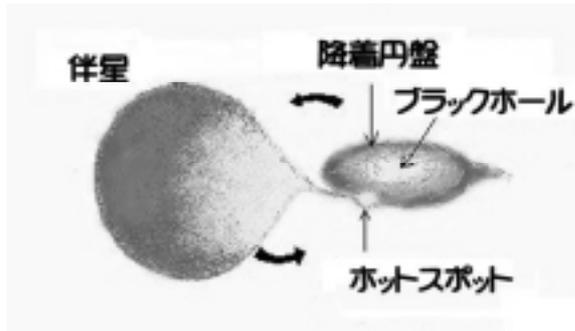


図 15.1 近接連星のイメージ

### 15.1 近接連星の重力圏

近接連星では、潮汐力や質量交換・エネルギー交換などの相互作用が重要となり、2つの星は物理的に影響を及ぼしあう。そのため、星の構造や進化などが単独星の場合と大きく異なってくる。また相互作用の結果、さまざまな活動も引き起こされる。

相互作用の例として、たとえば、もともと2つの星が楕円軌道上を公転していたとしても、潮汐力によって角運動量が失われ、次第に円軌道になってしまう。また同じ原因から、2つの星は、地球と月のように、つねに同じ面を相手に向けるようになる (自転同期という)。さらに潮汐作用の結果、“丸い”はずの星が、“卵形”に歪んでしまう。これらの結果、“卵形”をした2つの星が、尖った部分を相手に向けながら、お互いのまわりを円運動しているような星系ができあがる。

近接連星のまわりの重力圏は、瓢箪型の構造をしていて、ロッシュ・ローブ (Roche lobe) と呼ばれている (図 15・1)。すなわちそれぞれの星の近くではそれぞれの星の重力圏が卓越しているが、2つの星の間にそれぞれの星

の重力圏が接する宙点 ( $L_1$ ) がある - (第1) ラグランジュ点 (Lagrange point) と呼ぶ。その結果、全体の重力圏は、 $L_1$  にくびれを持った瓢箪型のものになる。それぞれの星の重力圏は、お互いの相互作用の結果、卵型になっている。質量の大きな星の方が重力圏のサイズは大きい。

星の大きさと重力圏ロッシュ・ローブの関係によって、近接連星は、分離型、半分離型そして接触型の3つのタイプに分かれる (図 15・2)。どちらの星もロッシュ・ローブより小さいものは、2つの星が接していないために分離型 (detached system) と呼ばれる。片方の星がロッシュ・ローブを満たしているものは、半分離型 (semi-detached) と呼ばれる。両方の星がロッシュ・ローブを満たしていると、星同士が接するので接触型 (contact) と呼ばれる。

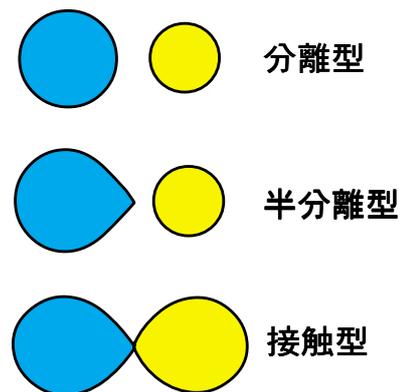


図 15.2 近接連星の分類

### 15.2 ロッシュポテンシャル

ここでロッシュポテンシャルというものを導入して、近接連星の構造 (平衡形状) を考えてみよう。

質量  $M_1$  の天体 (星1) と質量  $M_2$  の天体 (星2) が、共通重心  $O$  のまわりを角速度  $\Omega$  で公転しているとしよう (図 15・3)。簡単のために公転軌道は円軌道だとする。ポテンシャルを考える前に、近傍の空間に置いた質量  $m$  ( $\ll M_1, M_2$  とする) の質点いわゆるテスト粒子にどんな力が働いているかを考えてみよう。

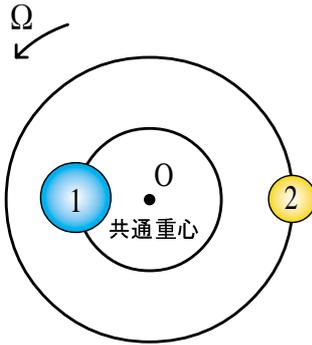


図 15.3 近接連星の軌道

星 1 も星 2 も動いているので、慣性系からみると周囲の重力場は時々刻々と変化している。そこで問題を扱いやすくするために、連星系の公転と一緒に回転する座標系に乗って考えよう(図 15・4)。公転と同期した座標系では 2 つの星の位置は変化しない。ただし回転系に乗ったために、テスト粒子には、2 つの星からの重力以外に、非慣性力として遠心力が働くことになる。

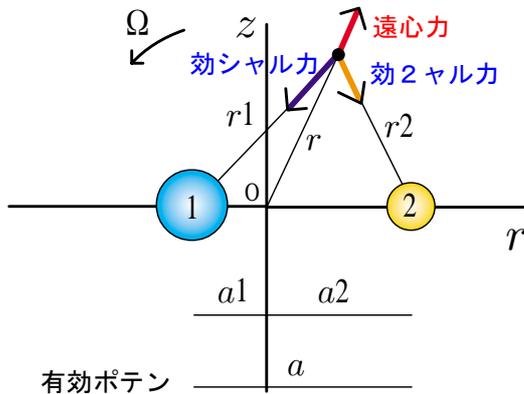


図 15.4 近接連星の公転と共に回転する重心座標系

### 15.2.1 力のベクトル表示

図に示したように、星 1、星 2 の中心からテスト粒子への位置ベクトルを  $r_1$ 、 $r_2$  とし、連星系の重心(公転中心)からテスト粒子への位置ベクトルを  $r$  とすると、テスト粒子に働く力  $F$  は、

$$F = -\frac{GM_1 m}{r_1^2} \frac{r_1}{r_1} - \frac{GM_2 m}{r_2^2} \frac{r_2}{r_2} + mr\Omega^2 \frac{r}{r} \quad (15.1)$$

と表すことができる。この(15.1)式の右辺の第 1 項は、星 1 から働く重力で、星 1 からの距離の自乗に反比例し、星 1 の中心方向を向いている。第 2 項は同じく星 2 からの重力である。また第 3 項は、遠心力を表し、回転中心  $O$  から外向きである。

連星間距離を  $a$  とし、一般化されたケプラーの第 3 法則、

$$\Omega^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{a^3} \quad (15.2)$$

を用いれば、(15.1)式から公転の角速度  $\Omega$  を消去して、

$$F = -\frac{GM_1 m}{r_1^2} \frac{r_1}{r_1} - \frac{GM_2 m}{r_2^2} \frac{r_2}{r_2} + \frac{G(M_1 + M_2)m}{a^3} r \frac{r}{r} \quad (15.3)$$

と表せる。

問 15.1 単位質量当りの力、すなわち加速度ではどうなるか?

### 15.2.2 力の成分表示

以上のベクトル形式で書かれた式を成分で表示するために、連星系の軌道面内で図 15・4 のように、系の重心  $O$  を原点とし 2 つの星を結ぶ線を  $x$  軸とするような直角座標系を取ろう。

そうすると  $(x, y)$  にあるテスト粒子に働く力の成分  $F_x$ 、 $F_y$  は、それぞれ、

$$F_x = -\frac{GM_1 m}{r_1^2} \frac{x + a_1}{r_1} - \frac{GM_2 m}{r_2^2} \frac{x - a_2}{r_2} + \frac{G(M_1 + M_2)m}{a^3} x \quad (15.4)$$

$$F_y = -\frac{GM_1 m}{r_1^2} \frac{y}{r_1} - \frac{GM_2 m}{r_2^2} \frac{y}{r_2} + \frac{G(M_1 + M_2)m}{a^3} y \quad (15.5)$$

となる。ただしここで  $a_1$ 、 $a_2$  は全系の重心からの星 1、星 2 のそれぞれの重心までの距離である ( $a = a_1 + a_2$ )。これらは、質量比 (mass ratio) を、

$$f = \frac{M_2}{M_1} \quad (15.6)$$

とおくと、重心の定義から、

$$a_1 = \frac{aM_2}{M_1 + M_2} = \frac{af}{1 + f} \quad (15.7)$$

$$a_2 = \frac{aM_1}{M_1 + M_2} = \frac{a}{1+f} \quad (15.8)$$

と表せる。また原点、星1、星2からの重心の距離、 $r$ 、 $r_1$ 、 $r_2$  は、それぞれ、

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (15.9)$$

$$r_1 = \sqrt{(x + a_1)^2 + y^2} \quad (15.10)$$

$$r_2 = \sqrt{(x - a_2)^2 + y^2} \quad (15.11)$$

である。

問15.2 テスト粒子に働く力の成分  $F_x$ 、 $F_y$  を導け。

### 15.2.3 ロッシュポテンシャル

さて、ここでいよいよ、上の力の場を与えるようなポテンシャル  $\Psi$  を求めよう。ポテンシャルの勾配が(単位質量当りの)力であることから、力の大きさをテスト粒子の質量で割って単位質量当りの力(加速度)に直し、力とポテンシャルの関係として、

$$\frac{\mathbf{F}}{m} = -\nabla\Psi \quad (15.12)$$

が、あるいは成分表示で、

$$\frac{F_x}{m} = -\frac{\partial\Psi}{\partial x} \quad (15.13)$$

$$\frac{F_y}{m} = -\frac{\partial\Psi}{\partial y} \quad (15.14)$$

と表せる。これらの関係から、ポテンシャル  $\Psi$  は、

$$\begin{aligned} \Psi &= -\frac{GM_1}{r_1} - \frac{GM_2}{r_2} - \frac{\Omega^2}{2}r^2 \\ &= -\frac{GM_1}{r_1} - \frac{GM_2}{r_2} - \frac{G(M_1 + M_2)}{2a^3}r^2 \end{aligned} \quad (15.15)$$

となる。

ポテンシャル  $\Psi$  の式の右辺の第1項と第2項はそれぞれ星1、星2の重力ポテンシャルであり、第3項は遠心力のポテンシャルを表す。この  $\Psi$  は一般には有効ポテンシャル( effective potential )と呼ばれるものだが、今の場合はとくに、このようなポテンシャルを最初に研

究した Edouard Roche にちなんでロッシュポテンシャル( Roche potential )と呼んでいる。

問15.3 (15.15)式を(15.12)式に代入して、(15.6)式が得られることを確かめよ。

### 15.2.4 力とポテンシャルの無次元化

上のポテンシャルの形に沿って物質は分布する。すなわちポテンシャルの等しいところ - 等ポテンシャル面( equi-potential surface ) - では、物質の密度も等しい。このような等ポテンシャル面という概念は、地図などに出てくる等高線とよく似た概念である。

したがって連星の形状を求めるためには、等ポテンシャル面を求めればよいのだが、ポテンシャルを表す(15.15)式は、質量や万有引力定数などを含んでおり、いちいちそれらを与えなければならない。しかし、単位をうまく選ぶことにより、それらが見かけ上現れないようにすることができる(無次元化/規格化)

長さの単位として連星間距離  $a$  を、ポテンシャルの単位として  $GM/a$  を取ろう。そして無次元化した長さとして、

$$\hat{x} = \frac{x}{a}, \hat{y} = \frac{y}{a}, \hat{r} = \frac{r}{a}, \hat{r}_1 = \frac{r_1}{a}, \hat{r}_2 = \frac{r_2}{a} \quad (15.16)$$

を導入すると、

$$\hat{r} = \sqrt{\hat{x}^2 + \hat{y}^2} \quad (15.17)$$

$$\hat{r}_1 = \sqrt{\left(\hat{x} + \frac{f}{1+f}\right)^2 + \hat{y}^2} \quad (15.18)$$

$$\hat{r}_2 = \sqrt{\left(\hat{x} - \frac{1}{1+f}\right)^2 + \hat{y}^2} \quad (15.19)$$

となる。これらを使うと、最終的に、無次元化したポテンシャル  $\Phi$  は、

$$\Phi = \frac{\Psi}{GMm/a} = -\frac{1}{\hat{r}_1} - \frac{f}{\hat{r}_2} - \frac{1+f}{2}\hat{r}^2 \quad (15.20)$$

と表せる。

問15.4 (15.20)式を導け。

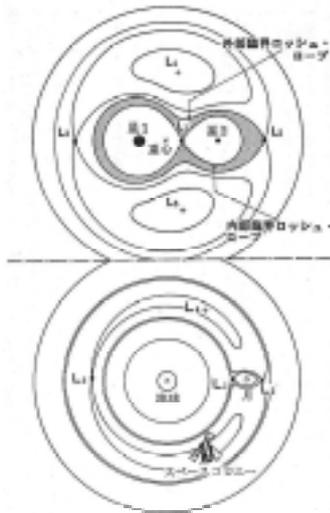


図 15.5 連星のロッシュポテンシャル

このように無次元化すると、連星系での有効ポテンシャル(ロッシュポテンシャル)は、結局、質量比  $f$  だけをパラメータとして決まる(図 15・5)

2つの星の周辺(公転軌道面内)でポテンシャル  $\Phi$  が一定の線(等ポテンシャル面)を描くと図のようになる。等ポテンシャル面は、星1あるいは星2のごく近傍ではほぼ円状(実際は球状)であり、またずっと遠方でもほぼ球状になる。またとくに、2つの星を包む横8の字形の等ポテンシャル面を内部臨界ロッシュ・ローブと呼び、もう少し外側の瓢箪形のものを外部臨界ロッシュ・ローブと呼ぶ。さらに、ポテンシャルの極値(すべての力が釣り合っている場所)が5つあり、ラグランジュ点(Lagrange point)と名づけられている(図の  $L_1$  から  $L_5$  まで)

さてポテンシャルの勾配が力なので、力は等ポテンシャル面に垂直に働き、等ポテンシャル面に沿った方向には働かない。したがってもしガスがテスト粒子の集まりだとすると、ガスの分布が等ポテンシャル面から歪んだ場合、それを等ポテンシャル面にならすような力:潮汐力が働く。その結果、ガスの分布は再び等ポテンシャル面に沿ったものになる。実際の星ではもっと複雑ではあるが、それでも近接連星系において、それぞれの星の外層は、大体ロッシュポテンシャルに沿ったものになっ

ていると考えられている。

問 15.5 まず質量比  $f$  を1として、 $x$  軸( $y=0$ )の上でのロッシュポテンシャルをグラフに表せ。

問 15.6 グラフから、ラグランジュ点すなわちポテンシャルの極値を求めてみよ。 $x$  軸上には  $L_1$  から  $L_3$  まで3つある。

問 15.7 質量比  $f$  をいろいろ変えて同じ作業を行ってみよ。

問 15.8 いろいろな質量比  $f$  に対して、ロッシュポテンシャルの全体を描いてみよ。また  $x$  軸上以外のラグランジュ点  $L_4$  と  $L_5$  を全体図から求めてみよ。

表 15.1 質量比  $f$  の例

天体名	質量比 $f$
ロッシュワールド	1
うみへび座 EX 星	0.23
地球 - 月系	0.0123
太陽 - 木星系	0.00095479

コラム:スペースコロニーとラグランジュ点

## 16 星の内部構造

天体の形状や構造を支配する主な力は、物質の及ぼす重力、回転運動に伴う遠心力、そしてガスの圧力、電磁力、輻射の力などである。

そのうちの重力に関して、いままでの章では、外場として与えてきた。すなわち地球重力場や中心天体の重力場などを仮定し、したがって重力/重力加速度を与えた上で、その中での天体の構造を考えてきた。地球の大気や恒星の希薄な大気そして中心天体のまわりの降着円盤など、ガス自身の質量が無視できる範囲内では、こうした重力場を外場として与える近似は悪くない。

しかし、たとえば、星の内部の構造のように、ガス自身が作る重力場の中での天体の形状を考えるときには、ガスの分布が重力場を決め、その重力場がガスの分布を決めるので、ガスの分布と重力場とを同時にかつ無矛盾に解かなければならない (self-consistent という)。

このような、ガス自分自身の重力 - 自己重力 (self-gravity) と呼ぶ - を考慮しながら天体の形状を決めるのは、一般には大変難しくなる。ここでは、比較的容易に解ける場合として、球対称天体の場合、いわば星の内部の構造を考えてみよう (図 16・1)。

図 16.1 太陽の内部構造

### 16.1 主系列星

夜空に輝く星 (star) は、宇宙空間のガスが自分自身の重力で引き寄せ合って球状に集まり、内部でエネルギーを発生して自ら光っている天体である。しばしば恒星 (fixed star)

ともいわれる。星にも、主にその進化の段階に応じていろいろなタイプがある (§ 20 参照)。ざっと並べてみると、質量が小さすぎて核融合の火を灯せなかった褐色矮星 (brown dwarf)、生まれたばかりでまだ核融合を起こしていない原始星 (protostar)、水素がヘリウムに変換する核融合反応を中心部で持続させながら安定して輝いている主系列星 (main sequence star)、大気が不安定になって明るさが変動する脈動変光星 (pulsating variable)、核融合反応が安定でなくなり膨張して赤くなった赤色巨星 (red giant)、恒星進化の末期に外層大気が飛散して高密度の中心核だけが残った白色矮星 (white dwarf)、同じく進化の末期に中心の核反応が暴走して星全体が大爆発する超新星 (supernova)、超新星爆発の後に残される中性子星 (neutron star) やブラックホール (black hole) などなど。ここでは、ガスでできた星の内部構造に注目する。

観測的に測定することのできる星の基本的な物理量は、

表 16.1	観測量
質量	$M$
表面温度	$T$
半径	$R$
光度	$L$

などである (ここでは簡単のために化学組成や回転などの効果は考えない)。

これらの物理量は、観測的には、おおむね、

$$10^{-1}M_{\odot} \leq M \leq 10^2M_{\odot} \quad (16.1)$$

$$10^{-2}R_{\odot} \leq R \leq 10^3R_{\odot} \quad (16.2)$$

$$10^3\text{K} \leq T \leq 10^5\text{K} \quad (16.3)$$

$$10^{-6}L_{\odot} \leq L \leq 10^6L_{\odot} \quad (16.4)$$

の範囲にある。ただしここで、

$$M_{\odot} = 1.99 \times 10^{33} \text{ g} \quad (16.5)$$

$$R_{\odot} = 6.96 \times 10^{10} \text{ cm} \quad (16.6)$$

$$T_{\odot} = 5780 \text{ K} \quad (16.7)$$

$$L_{\odot} = 3.96 \times 10^{33} \text{ erg s}^{-1} \quad (16.8)$$

は太陽(☉)に関する量である。

これらの4つの物理量は独立ではない。まず、光度  $L$  と半径  $R$ 、表面温度  $T$  の間には、ステファン・ボルツマンの法則 (Stefan-Boltzmann's law) :

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \quad (16.9)$$

が成り立つ。さらに、いわゆる主系列星については、基本量の間成り立つ関係として、

- 温度光度関係 : スペクトル型 (表面温度  $T$ ) - 絶対等級 (光度  $L$ )
- 質量光度関係 : 質量  $M$  - 光度  $L$

の2つが知られている。前者の温度光度関係は、ふつうはHR図 (Hertzsprung-Russell 図) と呼ばれるが、表面温度が高温の星ほど光度が大きいという関係である (図16・2)。また後者の質量光度関係は、質量が大きな星ほど光度が大きいという関係だ (図16・3)。したがって、主系列星に関しては、基本的な物理量のうち、本当に独立なものは、たった一つ、たとえば、

質量  $M$

だけである。

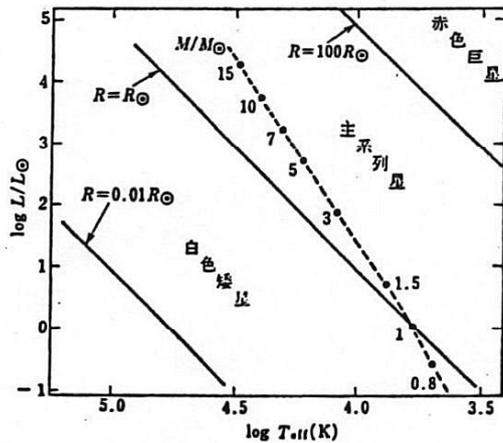


図16.2 主系列星の温度光度関係 (HR 図)。主系列星はおおむね太い実線上に並ぶ。数値は太陽質量を単位とした星の質量。また破線は半径が一定の関係線。

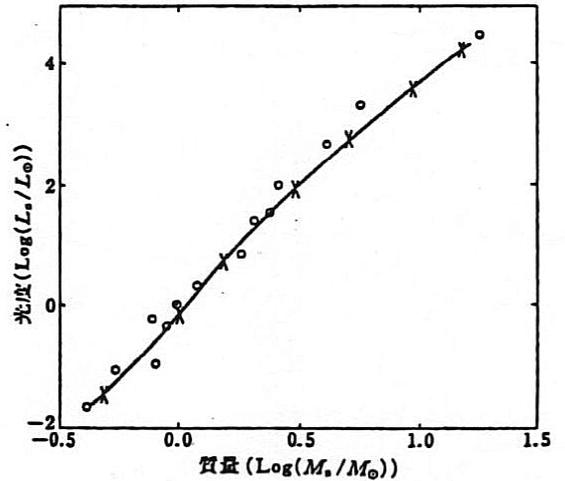


図16.3 主系列星の質量光度関係。主系列星はおおむね太い実線上に並ぶ。

言い替えれば、主系列星では、質量  $M$  だけをパラメータとして、表面温度  $T$  や半径  $R$  や光度  $L$  などの基本的な物理量、その内部の構造、寿命などなどがすべて一意的に決っている。主系列星のこのような性質を定めている基礎的な法則は、力学的な釣り合いとエネルギーの釣り合いである。

表16.2 主系列星の物理量

質量 $M/M_{\odot}$	光度 $L/L_{\odot}$	表面温度 K	半径 $R/R_{\odot}$	中心密度 [ $\text{g cm}^{-3}$ ]
100	$1.2 \times 10^6$	52000	14.00	1.6
50	$3.2 \times 10^5$	44000	9.20	2.5
20	$3.7 \times 10^4$	34000	5.70	4.6
10	$4.7 \times 10^3$	24000	3.80	9.0
5	$4.5 \times 10^2$	17000	2.60	21.0
2	$1.5 \times 10^2$	9200	1.50	66.0
1	$7.1 \times 10^{-1}$	5400	0.98	87.0
0.7	$1.4 \times 10^{-1}$	4500	0.62	86.0
0.5	$3.7 \times 10^{-2}$	3800	0.44	85.0

## 16.2 エムデン方程式

星間雲から原始星へ重力収縮していく星の形成段階では、重力が圧力を卓越している。しかし重力収縮がストップし、いったん星として形をなした後は、星の内部の任意の半径において、星を収縮させようとする重力と膨張させようとする圧力勾配力は釣り合っている。この重力と圧力勾配力の釣り合った状

態を力学平衡 ( dynamical equilibrium ) と呼んでいる。

16.2.1 静水圧平衡

星の内部構造は、星の中心に対して球対称 ( spherically symmetric ) だとし、また時間的に変化しない ( steady ) とする。したがって、密度や圧力などの物理量は、中心からの半径  $r$  のみの関数である ( 図 16・4 )。図のように、星の内部の半径  $r$  における密度を  $\rho$ 、圧力を  $P$ 、半径  $r$  より内側の質量を  $M_r$  としよう。星の表面 (  $r = R$  ) では、 $\rho \sim 0$ 、 $P \sim 0$ 、 $M_r = M$  である。

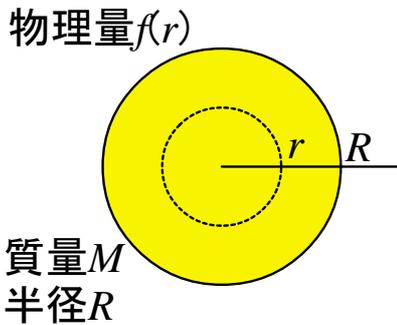


図 16.4 球対称性。球対称星の内部の物理量は半径  $r$  だけの関数になる。

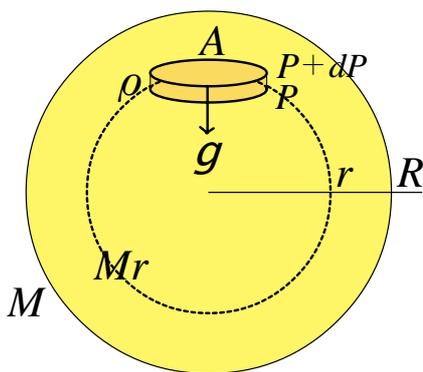


図 16.5 星の内部の静水圧平衡。

このとき、星の内部の半径  $r$  の場所に、厚さ  $dr$  で面積  $A$  の薄く微小な仮想的円柱 ( 微小体積要素 ) を考え ( 図 16・5 )、この微小円柱に働く半径方向の力の釣り合いを調べて

みよう ( 力の方向は、半径方向外向きを + とする )。図のように、円柱の下面の圧力を  $P$ 、上面の圧力を  $P + dP$  ( 外側ほど圧力は小さくなるので  $dP < 0$  ) とし、円柱内のガスの密度  $\rho$  は ( 円柱が薄いので ) 一定とする。

この微小円柱に対しては以下のような力が働く：

上面での全圧力	$-(P + dP)A$
下面での全圧力	$+PA$
重力	$-\frac{GM_r}{r^2}\rho A dr$
釣り合い	$-AdP - \frac{GM_r}{r^2}\rho A dr = 0$

あるいは、力学的な釣り合いの式として、

$$-\frac{GM_r}{r^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = 0 \quad (16.10)$$

が得られる。この ( 16.10 ) 式の第 1 項は、中心へ向かう単位質量当りの重力 ( gravitational force ) であり、第 2 項は圧力勾配力 ( pressure gradient force ) である。これは星の場合の静水圧平衡 ( hydrostatic equilibrium ) である。

問 16.1 星の中心 (  $r = 0$  ) で  $M_r$  はいくらか？  
また圧力勾配力はいくらか？

16.2.2 連続の式

つぎに、半径  $r$  より内側に含まれる質量  $M_r$  を決める方程式を立てよう。そのために、半径  $r$  と半径  $r + dr$  に挟まれた球殻を考える ( 図 16・6 )。

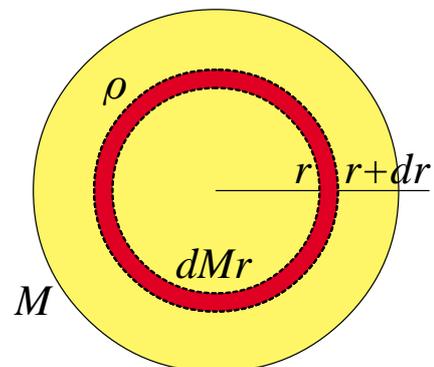


図 16.6 星の内部の球殻。

球殻は十分薄いとして、その内部では密度  $\rho$  は一定としよう。球殻の体積は、 $4\pi r^2 dr$  なので、 $M_r$  の増加分  $dM_r$  は、

$$dM_r = \rho 4\pi r^2 dr$$

となり、あるいは、微分形に変形して、

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (16.11)$$

が得られる。この (16.11) 式がガスの分布と重力場を関係づける式で、連続の式 (continuity equation) と呼ばれる。

### 16.2.3 状態方程式

変数が3つ ( $\rho$ 、 $P$ 、 $M_r$ ) あるので、方程式系を解くためには、もう一つ式が必要である。それは密度  $\rho$  と圧力  $P$  の間に成り立つ関係式、いわゆる状態方程式 (equation of state) である。ここでは、 $\rho$  と  $P$  の間に、ポリトロピック関係式 (polytropic relation) :

$$P = K\rho^\gamma; \quad K \text{ と } \gamma \text{ は定数} \quad (16.12)$$

が成り立つとする。

上の (16.10) - (16.12) 式が、力学平衡 / 静水圧平衡の成り立っている星 - すなわち自己重力ガス球 (selfgravitating gas sphere) の構造を支配する方程式系である (独立変数  $r$ ; 従属変数  $\rho$ 、 $P$ 、 $M_r$ )。ただし、エネルギーの発生や輸送の問題は考えていない。

問16.2 すべての質量が中心に集中している場合 (中心集中星) 上の (16.10) - (16.12) 式は、太陽大気の場合の方程式に帰着することを確かめよ。

### 16.2.4 ガス球の構造：エムデン方程式

構成しているガスを中心へ引き寄せようとする自分自身の重力と、中心から外へ向かう圧力勾配力の釣り合った、力学平衡にあるガス球 - 自己重力ガス球 - の構造を具体的に解いてみよう。

手順としては、3本の基礎方程式から変数を消去して1本の微分方程式にまとめ、つぎ

に変数変換をして得られた微分方程式を無次元化する。

まず基礎方程式の (16.10) 式を、

$$\frac{r^2 dP}{\rho dr} = -GM_r \quad (16.13)$$

と変形して、両辺を  $r$  で微分し、(16.11) 式を代入して  $M_r$  を消去すると、

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{r^2 dP}{\rho dr} \right) = -4\pi Gr^2 \rho \quad (16.14)$$

となる。さらに (16.12) 式から  $P$  を消去すると、 $\rho$  に関する2階の微分方程式：

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{r^2}{\rho} \frac{d}{dr} (K\rho^\gamma) \right] = -4\pi Gr^2 \rho \quad (16.15)$$

が得られる。

問16.3 (16.15) 式を導け。

中心の境界条件 (たとえば  $r=0$  で  $\rho = \rho_c$ 、 $d\rho/dr = 0$ ) を与えてこの (16.15) 式を解けば、ガス球の内部構造は求まるが、質量や半径の異なるガス球の構造を解くたびに、中心密度などを与えて解き直さなければならない。そこで普通は、以下のように変数変換して、(16.15) 式を無次元化する。

まず、変数変換の準備として、

$$\gamma = 1 + 1/N \quad (16.16)$$

として、(16.15) 式を、

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{r^2}{\rho} \frac{d}{dr} (K\rho^{1+1/N}) \right] = -4\pi Gr^2 \rho \quad (16.17)$$

と表す。さらに、

$$r = \sqrt{\frac{(N+1)P_c}{4\pi G\rho_c^2}} \xi = \sqrt{\frac{(N+1)K\rho_c^{1+1/N}}{4\pi G\rho_c^2}} \xi \quad (16.18)$$

$$\rho = \rho_c D^N \quad (16.19)$$

で定義される、無次元化した半径  $\xi$  と無次元化した密度  $D$  を用いると、(16.17) 式は、最終的に、

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{dD}{d\xi} \right) = -D^N \quad (16.20)$$

という形に整理される。

この自己重力ガス球の構造を表す無次元化した方程式を、エムデン方程式 ( Emden equation ) とか、レーン - エムデン方程式 ( Lane-Emden equation ) と呼ぶ。

エムデン方程式で残されたパラメータは、 $N$  (あるいは  $\gamma$ ) である。またこの ( 16.20 ) 式を解くための境界条件は、

$$\xi = 0 \text{ で } D = 1 \text{ ( } r = 0 \text{ で } \rho = \rho_c \text{ )} \quad (16.21)$$

$$\xi = 0 \text{ で } \frac{dD}{d\xi} = 0 \text{ ( } r = 0 \text{ で } \frac{dP}{dr} = 0 \text{ )} \quad (16.22)$$

である。

パラメータ  $N$  (あるいは  $\gamma$ ) を与えて上の境界条件のもとで ( 16.20 ) 式を解けば、ガス球の内部構造が求まる。

問 16.4 ( 16.17 ) 式を無次元化して、エムデン方程式 ( 16.20 ) を導出せよ。

### 16.2.5 エムデン方程式の解析解

パラメータ  $N$  が 0、1、5 の場合には、エムデン方程式は解析解を持つ。

(i)  $N = 0$  (  $\gamma = \infty$  ) のときの解  $D_0$  :

$$D_0 = 1 - \frac{1}{6}\xi^2 \quad (16.23)$$

(ii)  $N = 1$  (  $\gamma = 2$  ) のときの解  $D_1$  :

$$D_1 = \frac{\sin \xi}{\xi} \quad (16.24)$$

(iii)  $N = 5$  (  $\gamma = 6/5$  ) のときの解  $D_5$  :

$$D_5 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\xi^2}{3}}} \quad (16.25)$$

問 16.5 エムデン方程式 ( 16.20 ) で  $N = 0$  とした式を、境界条件を適用しながら積分して、( 16.23 ) 式を求めよ。

問 16.6 エムデン方程式 ( 16.20 ) に ( 16.24 ) 式を代入して、それらが確かにエムデン方程式の解であることを確かめよ。

問 16.7 エムデン方程式 ( 16.20 ) に ( 16.25 ) 式を代入して、それらが確かにエムデン方程式の解であることを確かめよ。

問 16.8 これらの解析解のグラフを描いてみよ ( 図 16.7 )

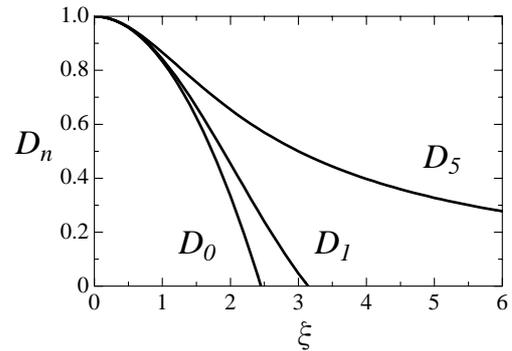


図 16.7 エムデン方程式の解析解。

### 16.2.6 エムデン方程式の数値解

ガス球が水素原子からできているとすると、水素原子は単原子理想気体なので、その比熱比は  $5/3$  である。さらに断熱状態だとすると、ポリトロップ指数  $\gamma$  は、ガスの比熱比に近い。すなわち、

$$\gamma = 5/3 \quad \text{あるいは} \quad N = 3/2$$

である。実際、主系列星の内部構造は、 $N = 3/2$  のエムデン解でよく近似できることがわかっている。

このような一般の  $N$  の場合には、エムデン方程式は数値的に解かなければならない。ここではオイラー法を用いて、エムデン方程式を数値的に解いてみよう。

まず、 $E = dD/d\xi$  という変数を導入して、エムデン方程式を連立方程式にする。

$$\frac{dD}{d\xi} = E \quad (16.26)$$

$$\frac{dE}{d\xi} = -\frac{2}{\xi}E - D^N \quad (16.27)$$

境界条件は、

$$\xi = 0 \quad \text{で} \quad D = 1, \quad E = 0 \quad (16.28)$$

である。

中心から  $d\xi$  の刻みで外向きに 0、1、2、...、 $i$ 、 $i + 1$ 、... と番号を振っていくと、中心の値は、

$$\begin{aligned} \xi_0 &= 0 \\ D_0 &= 1 \\ E_0 &= 0 \end{aligned} \quad (16.29)$$

である。さらに、 $i$  番目の値を、

$$\begin{aligned} \xi_i &= id\xi \\ D_i & \\ E_i & \end{aligned} \quad (16.30)$$

とすると、 $i + 1$  番目の値は、

$$\begin{aligned} \xi_{i+1} &= (i + 1)d\xi \\ D_{i+1} &= D_i + dD = D_i + E_i d\xi \\ E_{i+1} &= E_i + dE = E_i + \left( -\frac{2}{\xi_i} E_i - D_i \right) d\xi \end{aligned}$$

与えられる(図16・8)。中心から外へ向けて順番に  $i$  番目の値を計算していくことによって、数値的に構造を求めることができる。

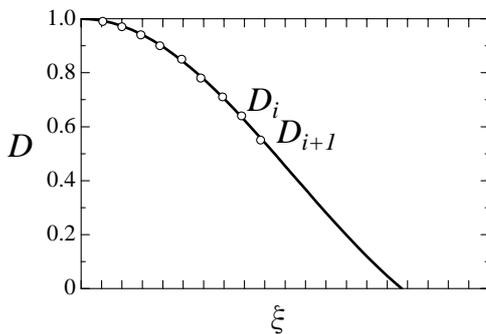


図 16.8 エムデン方程式の数値解法。

問 16.9 (16.26) 式と (16.27) 式を導け。

問 16.10 差分化した式を導け。

問 16.11 この方法で、 $N = 3/2$  の場合の解を計算してみよ。また解析解なども含め、他の場合も計算してみよ。

問 16.12 エムデン解を使って星の質量を表すと、(16.18) 式を  $r = \alpha\xi$  と置いて、

$$\begin{aligned} M &= \int_0^R 4\pi\rho r^2 dr \\ &= -4\pi\alpha^3 \rho_c \int_0^{\xi_0} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{dD^N}{d\xi} \right) d\xi \\ &= -4\pi\alpha^3 \rho_c \left[ \xi^2 \frac{dD^N}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_N} \\ &= \left[ \frac{1}{4\pi G^3} \frac{P_c^3}{\rho_c^4} \right]^{1/2} \left[ -(N + 1)^{1/3} \left( \xi^2 \frac{dD^N}{d\xi} \right) \right]_{\xi=\xi_N} \end{aligned}$$

のようになることを示せ。

なお最後の行の [ ] 内の値は、

$$\begin{aligned} \gamma = 5/3 \quad \text{のとき} \quad [ ] &= 10.73 \\ \gamma = 4/3 \quad \text{のとき} \quad [ ] &= 16.15 \end{aligned}$$

である。

コラム：規格化、無次元化

等密度面や等圧面は等ポテンシャル面に平行なので等ポテンシャル面の形がわかれば、(14.30) 式から回転星の大気構造がわかることになる。しかし有効ポテンシャルの(14.26) 式は、このままでは、中心核の質量  $M$  や自転角速度  $\Omega$  などが入っていて扱いにくい。質量や角速度をいちいち与えなければならないし、また出てきた結果は他の質量や角速度をもつ場合には使えないので汎用性に乏しい。さらに非常に大きな値や小さな値を計算しなければならない。

そこで、しばしば、長さや時間の単位をうまく選んで物理量の規格化 (normalization) を行う。あるいは物理変数を無次元にするので、無次元化 (non-dimensionalize) ともいう。無次元化 / 規格化は、扱う数値が 1 のオーダーになるように行うのが普通である。