



輻射圧駆動風の臨界点について
非相対論的領域

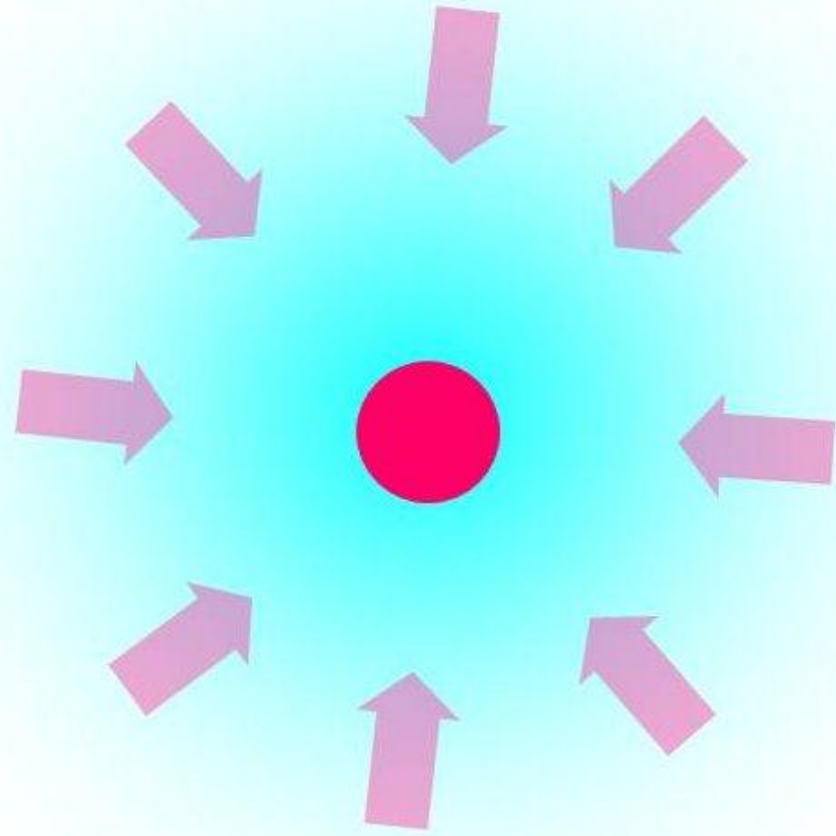
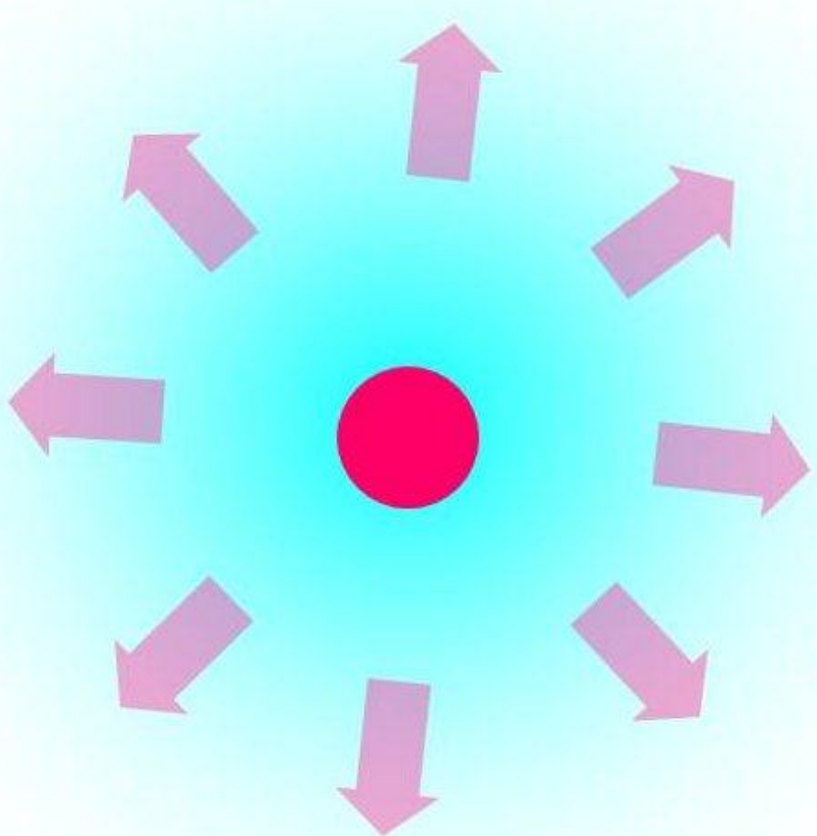
Radiatively Driven Spherical Wind
Critical Points and Curves
Nonrelativistic Regime

福江 純 @ 大阪教育大学



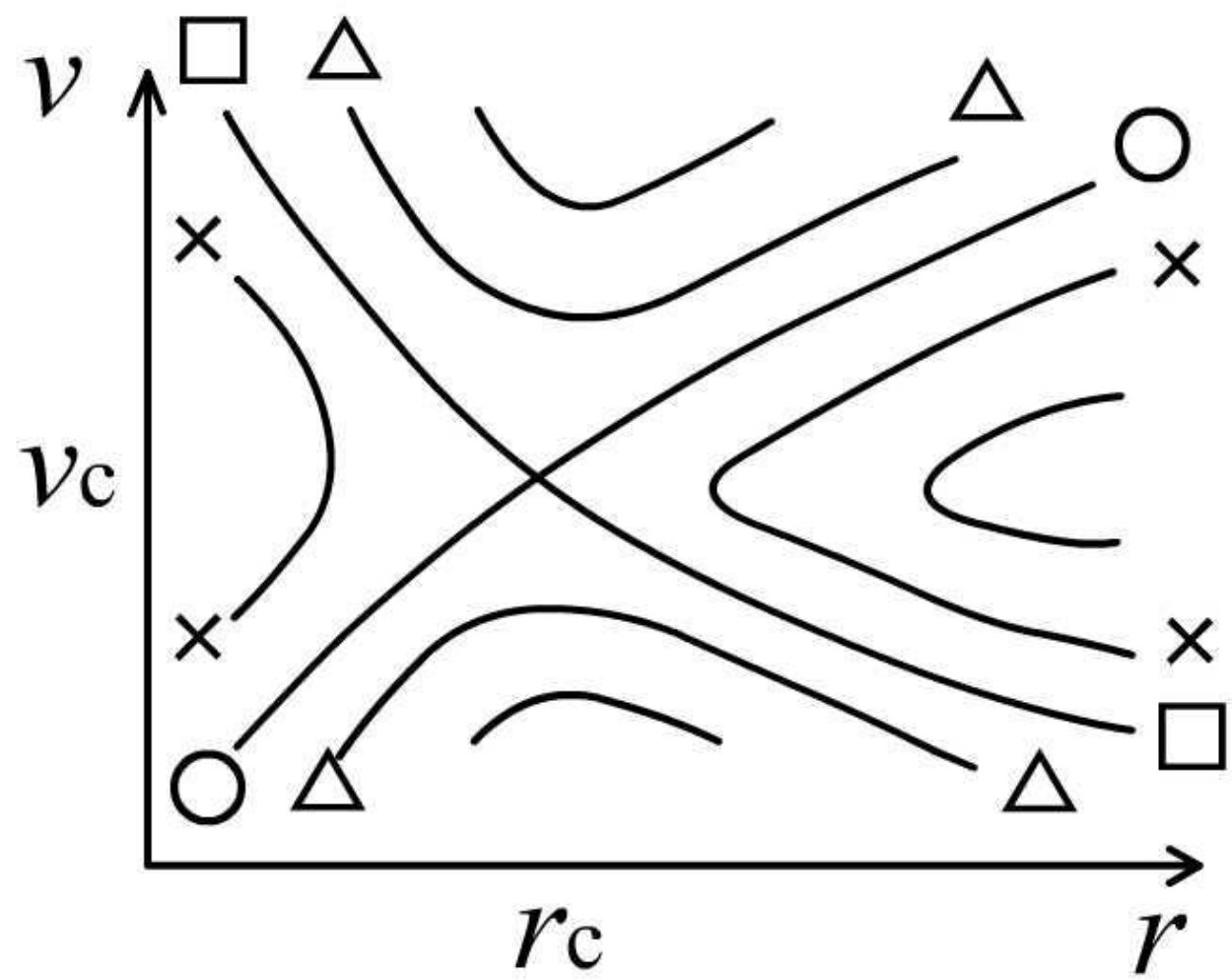


球对称風・球对称降着





球对称定常迁音速流

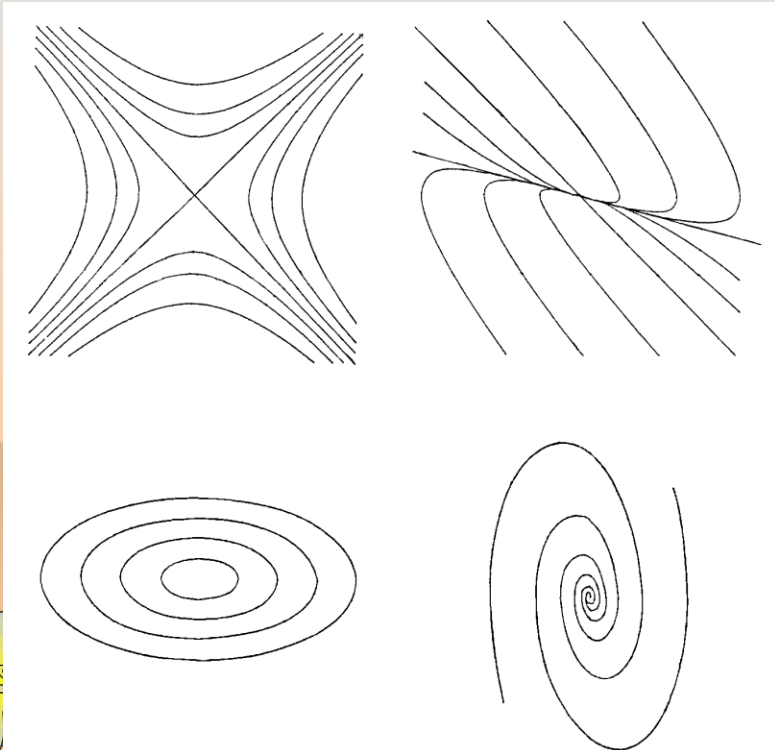




臨界点のタイプと出現

- ❁ 鞍点 (saddle)
- ❁ 結節点 (node)
- ❁ 渦心点 (center)

- ❁ ガス圧駆動パーカー風
saddle
- ❁ 磁気圧駆動W&D
node
- ❁ 粘性降着円盤
saddle (圧力優勢)
node (粘性優勢)
- ❁ 輻射圧駆動
node?





輻射圧駆動球対称風



対象

- ❁ **古典新星** : nonrelativistic
- ❁ **超新星**
- ❁ **X線バースター** : subrelativistic
- ❁ **ブラックホール風** : relativistic

ほぼエディントン光度で、輻射圧(連続光)で駆動される流れになっていると考えられる。

天体アウトフローでは、連続光で駆動される球対称風・非球対称風が少なくない





輻射圧駆動球対称風 モデル



❁ 拡散近似

- Ruggles and Bath 1979
- Ebisuzaki+ 1983
- Kato 1983 (SR?)
- Quinn, Paczynski 1985
- Paczynski+ 1986 (GR)
- Turolla+ 1986 (GR)
- Paczynski 1990 (GR)

❁ エディントン近似

- Nobili+ 1994 (GR)

❁ 先駆的研究

- Zytkow 1972
- Cassinelli, Hartmann 1975
- Bath and Shaviv 1976

❁ 球対称降着

- Flammang 1982 (GR)
- Nobili+ 1991 (GR)
- others





先行研究に関する懸案

❁ 30年来の懸案

臨界点(線)のタイプは？

- ・ほとんどの研究で臨界点のタイプについて記述がない、臨界点解析がなされていないようにみえる。
- ・散逸項(拡散近似)があると、粘性降着円盤のように、**結節点**になるのでは？

❁ 最近の懸案

拡散近似でいいの？

すでにThorne+ 1981でも:

The diffusion approx. is notoriously acausal...

信号が ∞ で伝わる拡散近似は因果律に抵触する

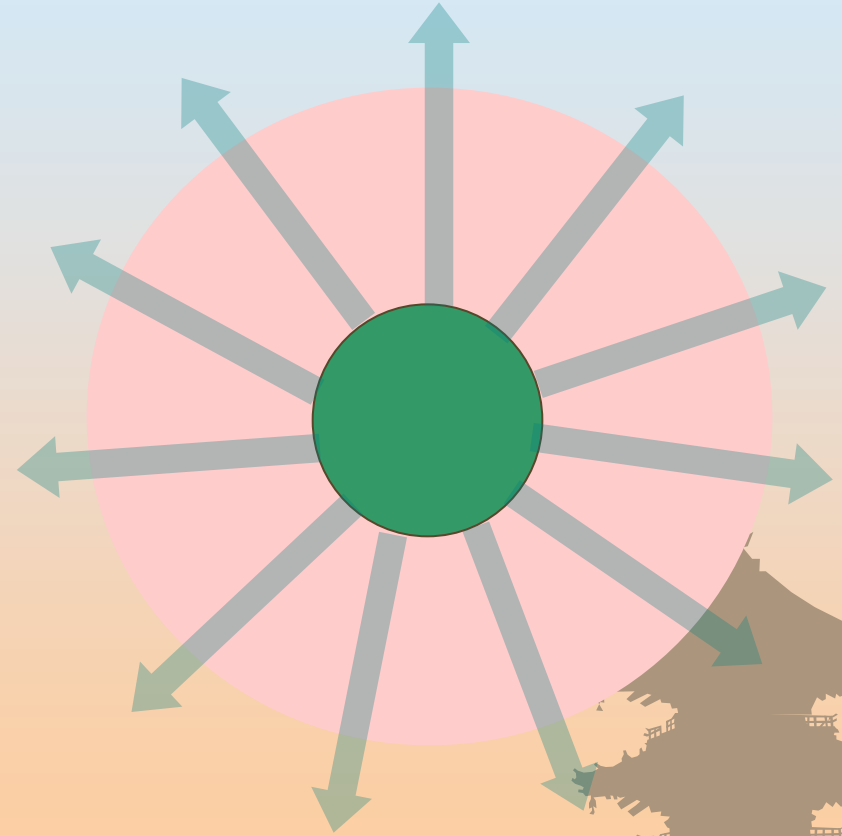
拡散近似→結節点→病的な振る舞い？





非相対論的球対称風

- ❁ 今回の状況:
 - 非相対論
 - 定常
 - 球対称(風)
 - モーメント定式化
 - 灰色近似
 - LTE





基礎方程式

- ❁ 連続の式
- ❁ 運動方程式
- ❁ エネルギー式
- ❁ 状態方程式
- ❁ 0次モーメント式
- ❁ 1次モーメント式
- ❁ エディントン近似
- ❁ LTE
- ❁ ベルヌーイの式

$$4\pi r^2 \rho v = \dot{M}, \quad (1)$$

$$v \frac{dv}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} - \frac{GM}{r^2} + \frac{\kappa + \sigma}{c} F, \quad (2)$$

$$\frac{1}{\gamma - 1} \left(v \frac{dp}{dr} - \gamma \frac{p}{\rho} v \frac{d\rho}{dr} \right) = -\rho(j - c\kappa E), \quad (3)$$

$$p = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \rho T, \quad (4)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 F) = \rho(j - c\kappa E), \quad (5)$$

$$\frac{dP}{dr} + \frac{3P - E}{r} = -\rho \frac{\kappa + \sigma}{c} F, \quad (6)$$

$$P = \frac{1}{3} E \equiv f E. \quad (7)$$

$$\frac{j}{4\pi} = \kappa B, \quad (8)$$

$$\dot{M} \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} - \frac{GM}{r} \right) + 4\pi r^2 F = \dot{E}, \quad (9)$$





パラメータと無次元変数

- 断熱音速
- 等温音速
- 無次元変数
- 無次元パラメータ

$$c_s^2 \equiv \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma \frac{\mathcal{R}}{\mu} T, \quad (10)$$

$$c_T^2 \equiv \frac{p}{\rho} = \frac{\mathcal{R}}{\mu} T. \quad (11)$$

$$x \equiv \frac{r}{r_g}, \quad \beta \equiv \frac{v}{c}, \quad \alpha_T \equiv \frac{c_T}{c}, \quad \alpha_s \equiv \frac{c_s}{c}, \quad \ell \equiv \frac{L}{L_E}, \quad (12)$$

$$m \equiv \frac{M}{M_\odot}, \quad \dot{m} \equiv \frac{\dot{M}}{\dot{M}_E}, \quad \dot{e} \equiv \frac{\dot{E}}{\dot{M}_E}, \quad (13)$$

- 新星
 - $\beta_\infty \sim 0.001-0.01$
 - $l_\infty \sim 1$
 - $\dot{m} \sim 10^5$
 - $\dot{e} \sim 1.05-6$

- 中性子星風
 - $\beta_\infty \sim 0.01-0.1$
 - $l_\infty \sim 1$
 - $\dot{m} \sim 10^3$
 - $\dot{e} \sim 1.05-6$

$$\dot{e} = \dot{m} \left(\frac{1}{2} \beta_\infty^2 \right) + l_\infty$$





拡散近似: 方程式

Eliminating the gas pressure and density from (2) using (4) and (1), we obtain

❁ 風方程式

$$\left(v^2 - \frac{\mathcal{R}}{\mu}T\right) \frac{1}{v} \frac{dv}{dr} = -\frac{d}{dr} \left(\frac{\mathcal{R}}{\mu}T\right) + \frac{\mathcal{R}}{\mu}T \frac{2}{r} - \frac{GM}{r^2} + \frac{\kappa + \sigma}{c} F. \quad (14)$$

❁ 輻射圧の書き換え

$$P = \frac{1}{3}aT^4, \quad (15)$$

and we rewrite the 1st moment equation (6) as

❁ 拡散近似

$$\frac{4aT^3}{3(\mathcal{R}/\mu)} \frac{d}{dr} \left(\frac{\mathcal{R}}{\mu}T\right) = -\rho \frac{\kappa + \sigma}{c} F, \quad (16)$$

❁ 風方程式

$$\left(v^2 - \frac{\mathcal{R}}{\mu}T\right) \frac{1}{v} \frac{dv}{dr} = \frac{\mathcal{R}}{\mu}T \frac{2}{r} - \frac{GM}{r^2} + \left[\frac{3(\mathcal{R}/\mu)\rho}{4aT^3} + 1\right] \frac{\kappa + \sigma}{c} F. \quad (17)$$

❁ よくある形

$$\left(v^2 - \frac{\mathcal{R}}{\mu}T\right) \frac{1}{v} \frac{dv}{dr} = \frac{\mathcal{R}}{\mu}T \frac{2}{r} - \frac{GM}{r^2} - \left(\frac{\mathcal{R}}{\mu}T + \frac{4aT^4}{3\rho}\right) \frac{d}{dr} \ln \left(\frac{\mathcal{R}}{\mu}T\right).$$





拡散近似: 方程式

❁ 無次元化した風方程式

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{\mathcal{N}_1}{\mathcal{D}}, \quad (25)$$

$$\frac{d\alpha_{\text{T}}^2}{dx} = \frac{\mathcal{N}_2}{\mathcal{D}}, \quad (26)$$

where

$$\mathcal{D} = \beta^2 - \alpha_{\text{T}}^2, \quad (27)$$

$$\mathcal{N}_1 = \beta \left[\frac{2\alpha_{\text{T}}^2}{x} - \frac{1}{2x^2} + \left(A \frac{\dot{m}}{m} \frac{1}{x^2 \beta \alpha_{\text{T}}^6} + 1 \right) \frac{\kappa + \sigma}{\sigma} \frac{\ell}{2x^2} \right] \quad (28)$$

$$\mathcal{N}_2 = -(\beta^2 - \alpha_{\text{T}}^2) A \frac{\dot{m}}{m} \frac{1}{x^2 \beta \alpha_{\text{T}}^6} \frac{\kappa + \sigma}{\sigma} \frac{\ell}{2x^2}. \quad (29)$$

$$\ell = \dot{e} - \dot{m} \left(\frac{1}{2} \beta^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \alpha_{\text{T}}^2 - \frac{1}{2x} \right). \quad (23)$$

❁ パラメータA

$$A = \frac{3(\mathcal{R}/\mu)^4}{4a} \frac{1}{4\sigma c^4 GM_{\odot}} = 4.4 \times 10^{-22}, \quad (24)$$





拡散近似 ($A=0$): 方程式

❁ 解析的にできる

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{D}}, \quad (30)$$

where

$$\mathcal{D} = \beta^2 - \alpha_T^2, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \beta \left(\frac{2\alpha_T^2}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{\ell}{2x^2} \right) \\ &= \frac{\dot{m}\beta}{2x^2} \left(\frac{4\alpha_T^2}{\dot{m}}x + \frac{1}{2x} + \frac{\dot{e}-1}{\dot{m}} - \frac{\gamma}{\gamma-1}\alpha_T^2 - \frac{1}{2}\beta^2 \right). \end{aligned} \quad (32)$$

❁ 特異点

$$\frac{2\beta_c^2}{x_c} - \frac{1-\ell_c}{2x_c^2} = 0, \quad (33)$$

$$1 - \ell_c = 1 - \dot{e} + \dot{m} \left[\frac{3\gamma-1}{2(\gamma-1)}\beta_c^2 - \frac{1}{2x_c} \right], \quad (34)$$

or

$$\beta_c^2 = \alpha_T^2 = \frac{2\frac{\dot{e}-1}{\dot{m}}x_c + 1}{2\frac{3\gamma-1}{2(\gamma-1)}x_c - \frac{8}{\dot{m}}x_c^2}, \quad (35)$$





拡散近似 ($A=0$) : 特異点

❁ nova wind

$$\gamma=4/3$$

$$\dot{m}=10^5$$

$$\dot{e}=5$$

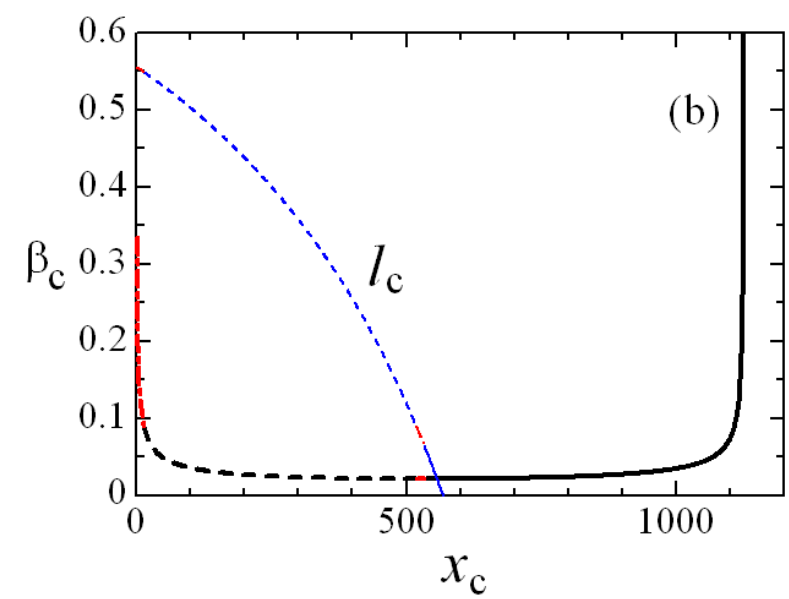
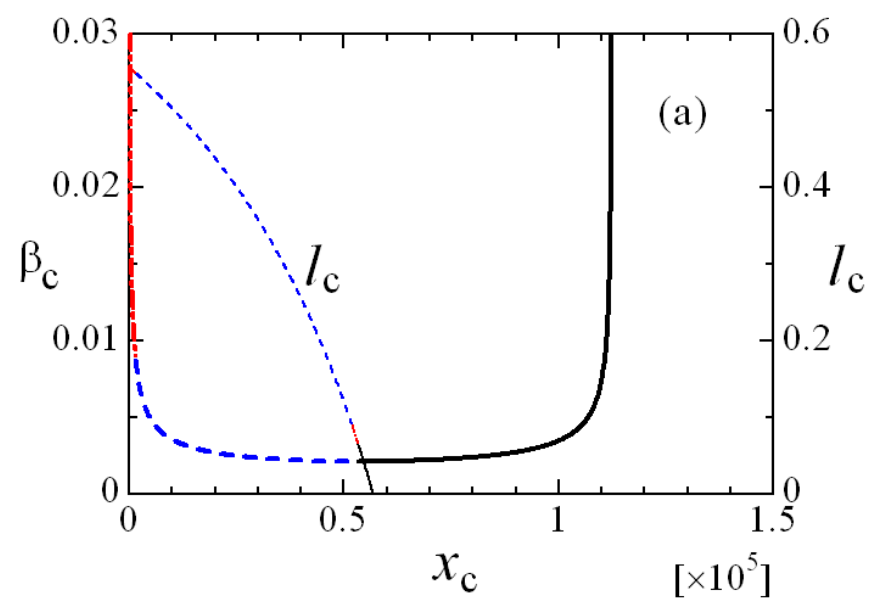
❁ neutron star wind

$$\gamma=4/3$$

$$\dot{m}=10^3$$

$$\dot{e}=1.1$$

実線:saddle
破線:center
鎖線:node





拡散近似 ($A=0$): 特異点解析

❁ 特異点の範囲

$$0 < x_c < \frac{3\gamma - 1}{8(\gamma - 1)} \dot{m}, \quad (36)$$

while the velocity β_c at the critical point is

$$\beta_c \geq \frac{\gamma - 1}{3\gamma - 1} \left[\sqrt{\frac{8}{\dot{m}}} + \sqrt{\frac{8}{\dot{m}} + \frac{2(3\gamma - 1) \dot{e} - 1}{\gamma - 1} \frac{1}{\dot{m}}} \right]. \quad (37)$$

❁ 特異点解析

large $x \rightarrow$ saddle
small $x \rightarrow$ center,
node

$$\lambda^2 - (\lambda_{11} + \lambda_{22})\lambda + (\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21}) = 0, \quad (38)$$

where

$$\lambda_{11} \equiv \left. \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x} \right|_c = 0, \quad (39)$$

$$\lambda_{12} \equiv \left. \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \beta} \right|_c = 2\beta_c > 0, \quad (40)$$

$$\lambda_{21} \equiv \left. \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x} \right|_c = \frac{\dot{m}\beta}{2x_c^2} \left(\frac{4\beta_c^2}{\dot{m}} - \frac{1}{2x_c^2} \right), \quad (41)$$

$$\lambda_{22} \equiv \left. \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \beta} \right|_c = -\frac{\dot{m}\beta_c^2}{2x_c^2} < 0. \quad (42)$$

At large x , the sign of λ_{21} becomes positive, and $(\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21}) = -\lambda_{12}\lambda_{21} < 0$; in this case the solutions of the





拡散近似 ($A/\neq 0$) : 特異線

❁ nova wind

$$\gamma = 4/3$$

$$\dot{m} = 10^5$$

$$\dot{e} = 5$$

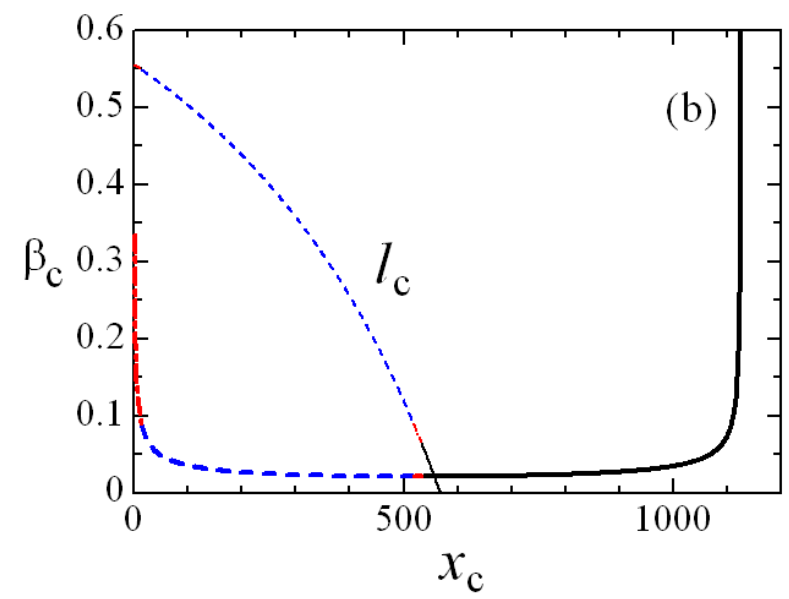
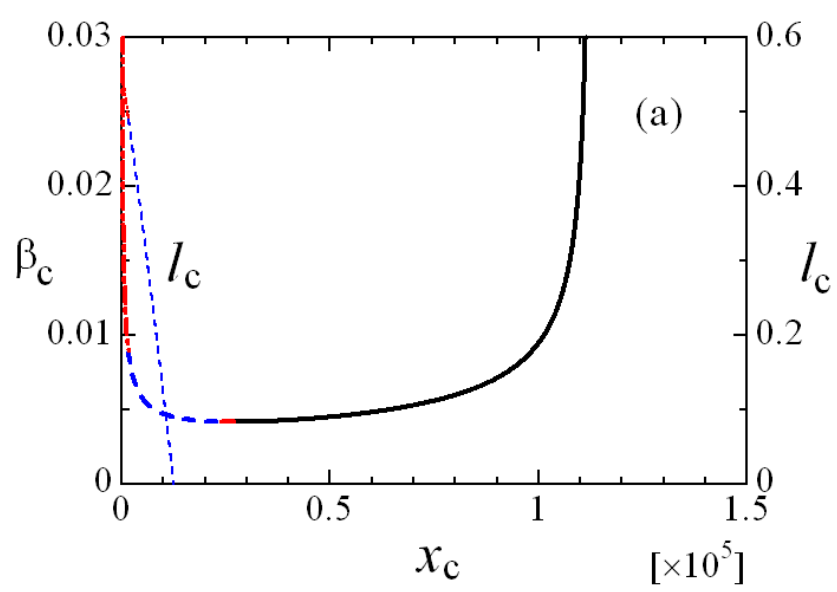
❁ neutron star wind

$$\gamma = 4/3$$

$$\dot{m} = 10^3$$

$$\dot{e} = 1.1$$

実線: saddle
破線: center
鎖線: node





扩散近似 ($A \neq 0$) : 特異点解析

$$\lambda_{11} \equiv \left. \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x} \right|_c, \quad \lambda_{12} \equiv \left. \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \beta} \right|_c, \quad \lambda_{13} \equiv \left. \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \alpha_T^2} \right|_c, \quad (43)$$

$$\lambda_{21} \equiv \left. \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial x} \right|_c, \quad \lambda_{22} \equiv \left. \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial \beta} \right|_c, \quad \lambda_{23} \equiv \left. \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial \alpha_T^2} \right|_c, \quad (44)$$

$$\lambda_{31} \equiv \left. \frac{\partial \mathcal{N}_2}{\partial x} \right|_c, \quad \lambda_{32} \equiv \left. \frac{\partial \mathcal{N}_2}{\partial \beta} \right|_c, \quad \lambda_{33} \equiv \left. \frac{\partial \mathcal{N}_2}{\partial \alpha_T^2} \right|_c. \quad (45)$$

Explicit expressions of these components are rather lengthy and omitted here.

The eigen-value equation of Λ is

$$\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0, \quad (46)$$

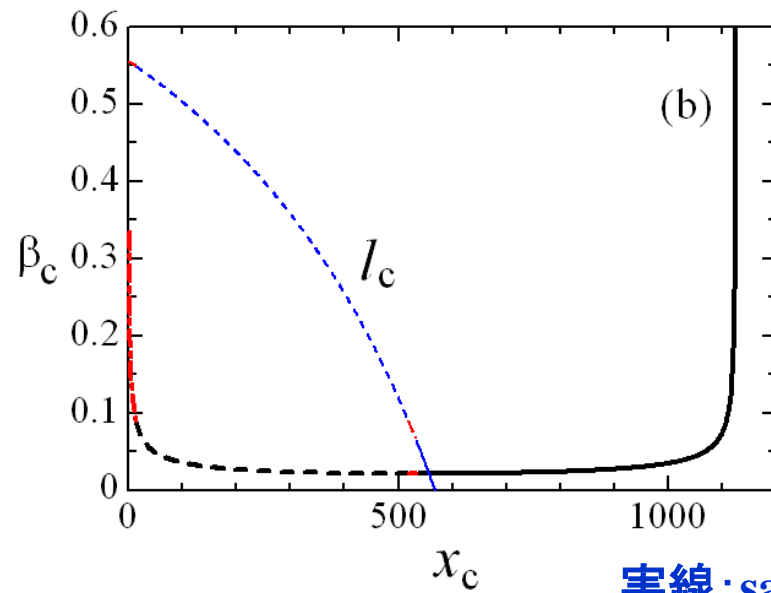
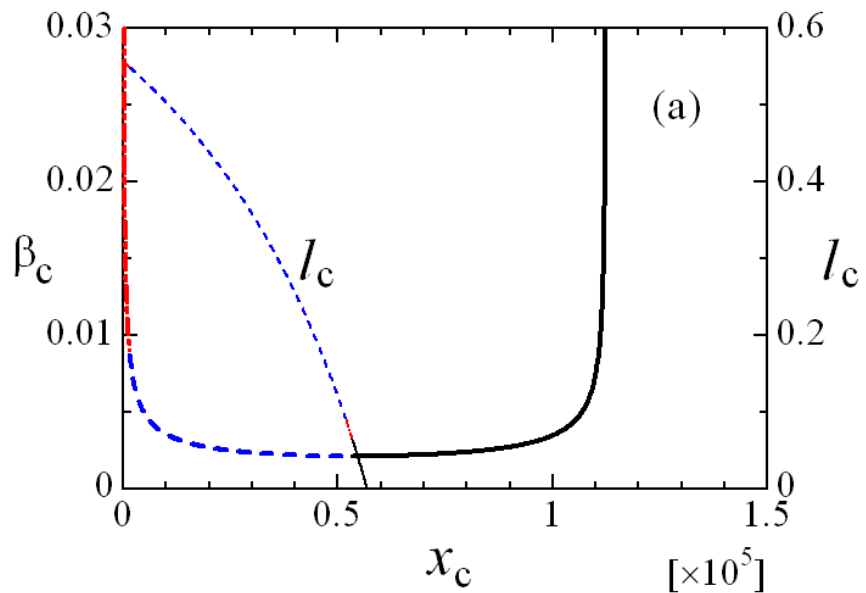
where

$$b = -\text{tr}\Lambda = -(\lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{33}), \quad (47)$$

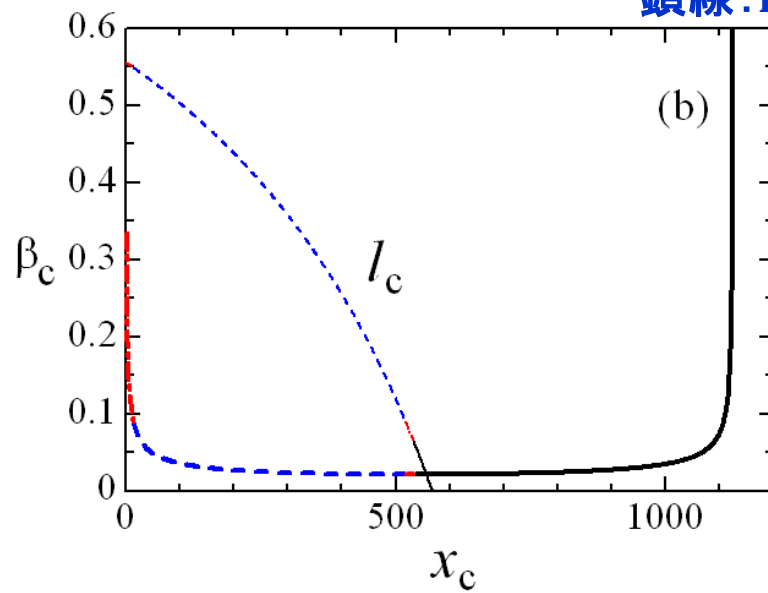
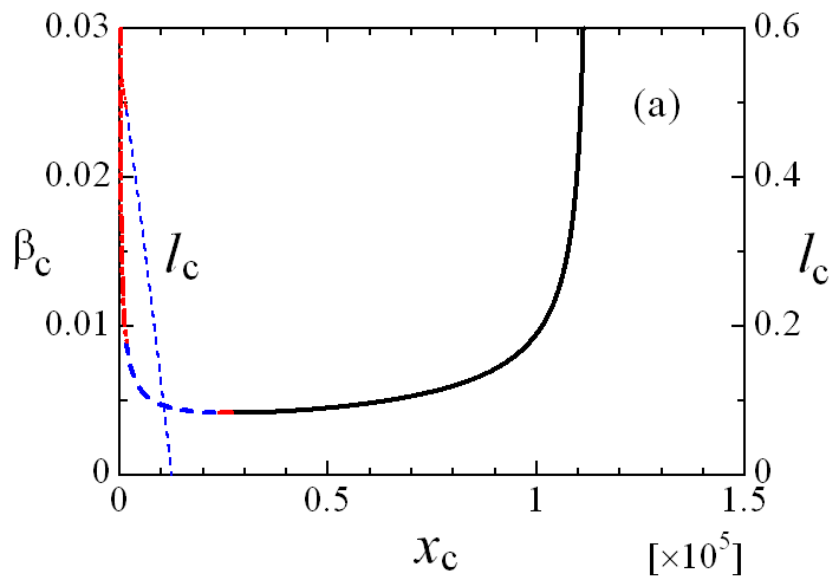
$$c = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{13} \\ \lambda_{31} & \lambda_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{vmatrix}, \quad (48)$$

$$d = -|\Lambda|. \quad (49)$$





实線:saddle
 破線:center
 鎖線:node





エディントン近似: 方程式

❁ 風方程式

❁ エネルギー式を使う

$$(v^2 - c_s^2) \frac{dv}{dr} = v \left(c_s^2 \frac{2}{r} - \frac{GM}{r^2} + \frac{\kappa + \sigma}{c} \frac{L}{4\pi r^2} \right) + (\gamma - 1) 4\pi \kappa (B - J), \quad (53)$$

$$(v^2 - c_s^2) \frac{dc_s^2}{dr} = -(\gamma - 1) \left[c_s^2 \left(v^2 \frac{2}{r} - \frac{GM}{r^2} + \frac{\kappa + \sigma}{c} \frac{L}{4\pi r^2} \right) + \frac{\gamma v^2 - c_s^2}{v} 4\pi \kappa (B - J) \right], \quad (54)$$

$$\frac{dL}{dr} = \frac{\dot{M}}{v} 4\pi \kappa (B - J), \quad (55)$$

$$\frac{d}{dr} \left(f \frac{4\pi}{c} J \right) = -\frac{3f - 1}{r} \frac{4\pi}{c} J - \frac{\dot{M}}{4\pi r^2 v} \frac{\kappa + \sigma}{c} \frac{L}{4\pi r^2}, \quad (56)$$

$$\dot{M} \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{\gamma - 1} c_s^2 - \frac{GM}{r} \right) + L = \dot{E}. \quad (57)$$





エディントン近似: 方程式

❁ 無次元化した 風方程式

$$(\beta^2 - \alpha_s^2) \frac{d\beta}{dx} = \beta \left(\frac{2\alpha_s^2}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{\kappa + \sigma}{\sigma} \frac{\ell}{2x^2} \right) + (\gamma - 1) \frac{\kappa}{2\sigma} (\mathcal{B} - \mathcal{J}), \quad (58)$$

$$(\beta^2 - \alpha_s^2) \frac{d\alpha_s^2}{dx} = -(\gamma - 1) \left[\alpha_s^2 \left(\frac{2\beta^2}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{\kappa + \sigma}{\sigma} \frac{\ell}{2x^2} \right) + \frac{\gamma\beta^2 - \alpha_s^2}{\beta} \frac{\kappa}{2\sigma} (\mathcal{B} - \mathcal{J}) \right], \quad (59)$$

$$\frac{d\ell}{dx} = \frac{\dot{m}}{\beta} \frac{\kappa}{2\sigma} (\mathcal{B} - \mathcal{J}), \quad (60)$$

$$\frac{d\mathcal{J}}{dx} = -\frac{3f-1}{f} \frac{1}{x} \mathcal{J} - \frac{\dot{m}}{2f} \frac{\kappa + \sigma}{\sigma} \frac{\ell}{x^4 \beta}, \quad (61)$$

$$\dot{m} \left(\frac{1}{2} \beta^2 + \frac{1}{\gamma-1} \alpha_s^2 - \frac{1}{2x} \right) + \ell = \dot{e}. \quad (62)$$

$$\mathcal{J} \equiv \frac{16\pi^2 r_g^2}{L_E} J, \quad (63)$$

$$\mathcal{B} \equiv \frac{16\pi^2 r_g^2}{L_E} B = 1.700 \times 10^{21} \frac{m}{\gamma^4} \alpha_s^8. \quad (64)$$

$$\frac{\kappa}{\sigma} = 1.838 \times 10^{-27} \frac{\dot{m}}{m} \frac{\gamma^{3.5}}{x^2 \beta \alpha_s^7}. \quad (65)$$





エディントン近似 ($\kappa=0$): 方程式

✿ 解析的にできる

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{D}}, \tag{66}$$

where

$$\mathcal{D} = (\beta^2 - \alpha_s^2),$$

$$\mathcal{N} = \beta \left(\frac{2\alpha_s^2}{x} - \frac{1-\ell}{2x^2} \right), \tag{67}$$

$$\alpha_s^2 = (\gamma - 1) \left[\dot{e} - \ell - \dot{m} \left(\frac{1}{2}\beta^2 - \frac{1}{2x} \right) \right]. \tag{68}$$

✿ 特異点

$$x_c = \frac{1}{2} \left[\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \frac{1-\ell}{2} - 1 \right] \frac{\dot{m}}{\dot{e}-\ell}, \tag{69}$$

$$\beta_c^2 = \left[\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \frac{1-\ell}{2} - 1 \right]^{-1} \frac{1-\ell}{2} \frac{\dot{e}-\ell}{\dot{m}}, \tag{70}$$

or

$$\beta_c^2 = c_{s,c}^2 = \frac{2(\dot{e}-1)x_c + \dot{m}}{2 \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \dot{m}x_c - 8x_c^2}. \tag{71}$$





エディントン近似 ($\kappa=0$): 特異点

❁ nova wind

$$\gamma=4/3$$

$$\dot{m}=10^5$$

$$\dot{e}=1.1, 5$$

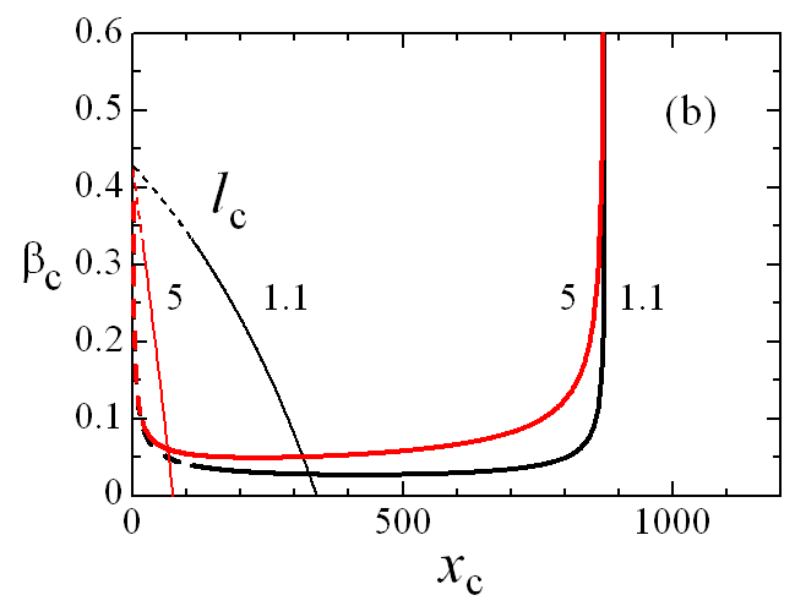
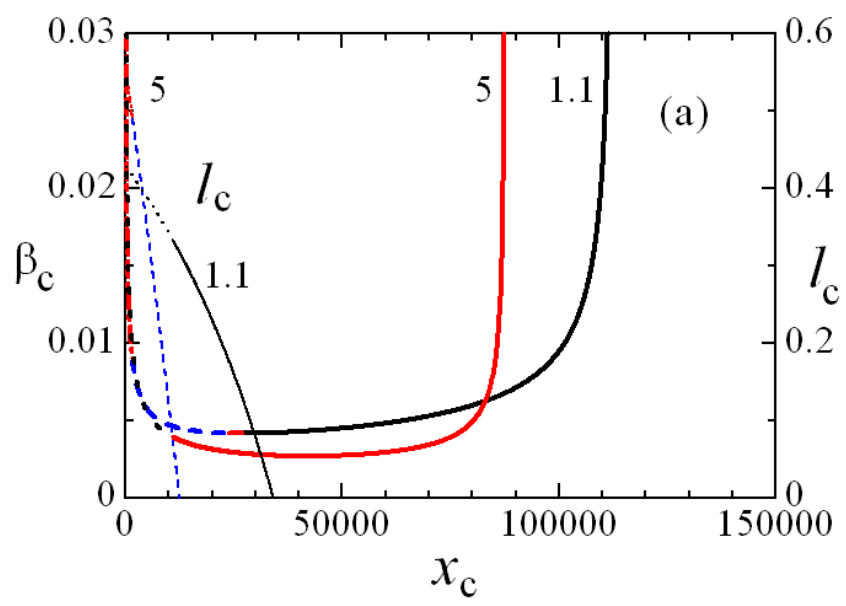
❁ neutron star wind

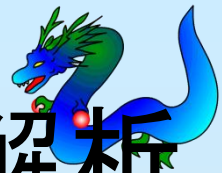
$$\gamma=4/3$$

$$\dot{m}=10^3$$

$$\dot{e}=1.1, 5$$

実線: 加速・減速
破線: 減速・減速





エディントン近似 ($\kappa=0$) : 特異点解析

❁ 特異点の範囲

$$\gamma < \frac{5-\ell}{3+\ell}, \quad \ell < \frac{5-3\gamma}{\gamma+1}. \tag{72}$$

❁ 特異点解析

all saddle

加速解 + 減速解

減速解 + 減速解

$$\lambda_{11} \equiv \left. \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x} \right|_c = (\gamma - 1) \frac{1}{2x_c}, \tag{73}$$

$$\lambda_{12} \equiv \left. \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \beta} \right|_c = (\gamma + 1) \beta_c > 0, \tag{74}$$

$$\lambda_{21} \equiv \left. \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x} \right|_c = \beta \left(\alpha_{s,c}^2 \frac{2}{x_c^2} - \frac{\gamma - 1}{x_c^3} \right), \tag{75}$$

$$\lambda_{22} \equiv \left. \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \beta} \right|_c = -\frac{2(\gamma - 1)}{x_c} \beta_c^2 < 0. \tag{76}$$

After several manipulations, we can show that

$$\begin{aligned} |\Lambda| &= \lambda_{11} \lambda_{22} - \lambda_{12} \lambda_{21} \\ &= -\frac{\beta_c^2}{2x_c^3} [(5 - 3\gamma) - (\gamma + 1)\ell] < 0. \end{aligned} \tag{77}$$





エディントン近似 ($\kappa=0$) : 解

❁ nova wind

$$\gamma=4/3$$

$$\dot{m}=10^5$$

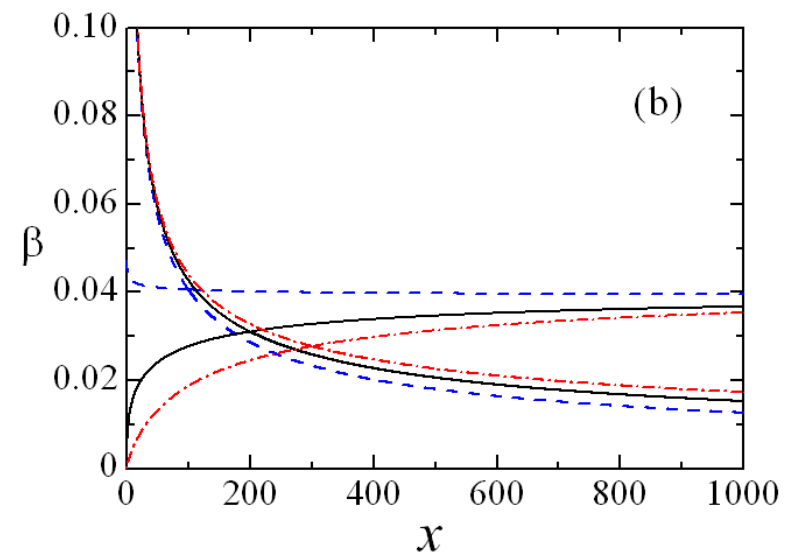
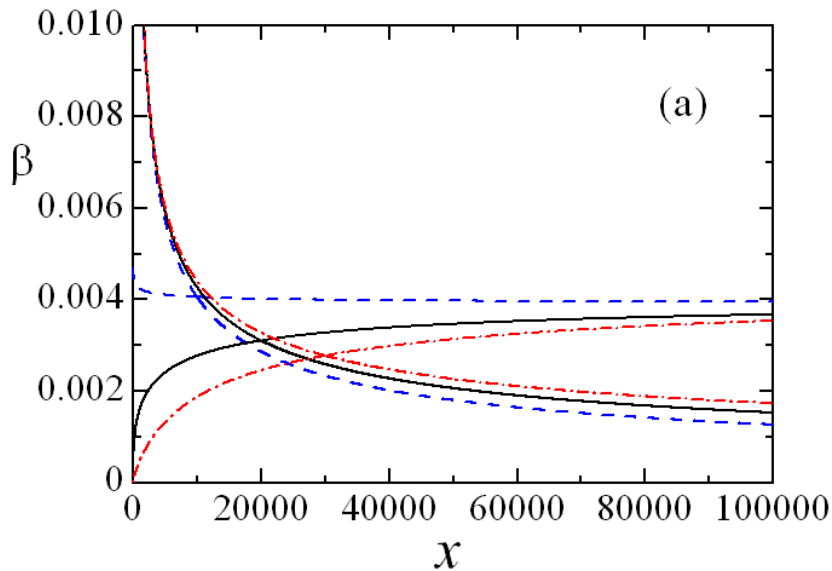
$$\dot{e}=1.1$$

❁ neutron star wind

$$\gamma=4/3$$

$$\dot{m}=10^3$$

$$\dot{e}=1.1$$





まとめ

- ❁ 拡散近似では、予想通り、臨界点は鞍点型ではなく、結節点型になるようだ。
- ❁ 物理的にも拡散近似はよくない。
- ❁ ただし、物理量の連続性からは、従来 of 解はだいたい正しい解になっている？
- ❁ エディントン近似では、期待通り、臨界点は鞍点型になるようだ。
- ❁ エディントン近似は、拡散近似よりも適用範囲は広いが、常に正しいという保証はない。
- ❁ とくに相対論的領域になると、修正が必要。





今後の課題

- ❁ エディントン近似で一般の場合
- ❁ 降着流
- ❁ 光学的に薄い
- ❁ 特殊相対論の範囲で、定式化し、特異点解析を行う。
- ❁ 一般相対論で行う。...
- ❁ エディントン近似の修正

