

らくらく相対論入門 その2： 擬ニュートンポテンシャルへの補正

福江 純

<〒582-8582 柏原市旭ヶ丘4-698-1 大阪教育大学教育学部>

e-mail : fukue@cc.osaka-kyoiku.ac.jp

ブラックホール周辺の相対論的性質をうまく模倣する道具として、“擬ニュートンポテンシャル”が重宝されている。これを使えば高校生でも相対論的現象の計算ができるだろう。ただし、ブラックホールのごく近傍では、擬ニュートンポテンシャルの精度は急激に悪化し、シュバルツシルト半径では物理量が発散してしまう。今回は、擬ニュートンポテンシャルで得られた物理量の精度を上げシュバルツシルト半径での発散を抑えるために提案された、速度に対する“ローレンツ補正”と“メトリック補正”および音速に対する“ローレンツ補正”について紹介する。

5. 擬ニュートンポテンシャルの弱点

人間、誰しも楽をしたいものである。もちろん若いときにはバリバリの計算をするし、若いときの苦勞は買ってでもしろというぐらいだから、ある程度は苦勞も必要だ。しかし、歳を取って経験を積み直感的に何が大事かわかるようになると、人生の時間も限られてくるし（笑）、手を抜けるところは抜くようになる。

まあ、そう思ったかどうかは知らないが、ポードン・パチンスキーら（1980年）は、シュバルツシルト時空周辺の力学的性質をよく近似する“擬ニュートンポテンシャル”：

$$\phi_{\text{PN}} = -GM/(r - a)$$

なるものを編み出した¹⁾。ここで M は中心の天体の質量、 $a (= 2GM/c^2)$ は中心天体のシュバルツシルト半径である (G は万有引力定数、 c は光速)。前回も述べたように、この擬ニュートンポテンシャルを利用すれば、ニュートン力学の知識しかない高校生でも、ブラックホール時空の醍

醐味を味わうことができるだろう。

この擬ニュートンポテンシャルは、ブラックホール降着流²⁾などで大変重宝されているが、もちろん何事にもあるように、擬ニュートンポテンシャルも弱点をもっている。

すなわち、前回証明したように、擬ニュートンポテンシャルは、厳密な相対論の式に対して、 a/r の一次までは正しい近似になっているのだが、裏を返せば、シュバルツシルト半径 a に近づくと、擬ニュートンポテンシャルで得られた物理量の精度が急激に悪化するのだ。具体的には、最終安定円軌道 ($r = 3a$) 付近では何とか使えるものの、限界束縛軌道 ($r = 2a$) 付近では近似がかなり悪くなり、シュバルツシルト半径 ($r = a$) では物理量が発散してしまう。

したがって、最終安定円軌道より外側しか円盤ガスの存在しない標準降着円盤モデルに対して擬ニュートンポテンシャルを利用するのはそれほど悪い近似ではなかったが、ブラックホール近傍まで円盤内縁が延びている光学的に薄い ADAF モ

デルや光学的に厚いスリムディスクモデルなどでは、擬ニュートンポテンシャルを用いると、中心近傍で精度が悪くなるのだ。

そこで、やはり歳を取って楽をしなくなったのかどうか知らないが、マレク・アブラモヴィッツたち（1996年）は、中心近傍の精度を改善するため、速度に対して、特殊相対論的なローレンツ補正を提案をした³⁾。

しかし、彼らの補正では、シュバルツシルト半径での発散に対する一般相対論的な側面と、音速などの熱力学的量への補正がなされていない。それらの残された弱点に対して、福江（2004年 a、b）は、4元速度に対して、一般相対論的なメトリック補正を組み入れた置換を提案し⁴⁾、音速に対しては、極度に相対論的な領域での発散を抑えるために、特殊相対論的なローレンツ補正を提案した⁵⁾。

擬ニュートンポテンシャルのもとで計算した物理量にこれらの補正を施したものは、シュバルツシルト半径まで非常にエクセレントな近似となることがわかった。その結果、たとえば、ガス円盤のモデルについては擬ニュートンポテンシャルのもとでシュバルツシルト半径近傍まで計算し、その（擬ニュートン）モデルにもとづいて、光の伝播やスペクトルは一般相対論的に計算するというような、木に竹を接ぐ計算でも、非常に力を発揮すると思われる。

以下、6節では速度に対するローレンツ補正とメトリック補正を、7節では音速に対するローレンツ補正を紹介する。

6. 速度に対する補正

まず、擬ニュートンポテンシャルのもとで、質量 M の天体のまわりの運動を考えてみる。一般的な運動はややこしいので、前回まとめた円運動と、半径方向の自由落下運動を取り上げてみよう。

■速度の補正

□円運動と自由落下

$$v_K^{\text{PN}} = \sqrt{\frac{GMr}{(r-a)^2}} = \sqrt{\frac{ac^2r}{2(r-a)^2}} \quad (31)$$

$$v_{\text{ff}}^{\text{PN}} = \sqrt{\frac{GM}{2(r-a)}} = \sqrt{\frac{ac^2}{4(r-a)}} \quad (32)$$

□ローレンツ補正とメトリック補正

$$\hat{u}_K = \frac{v_K^{\text{PN}}}{c} = \hat{\gamma}_K \frac{\hat{v}_K}{c} = \frac{\hat{v}_K/c}{\sqrt{1 - \hat{v}_K^2/c^2}} \quad (33)$$

$$\hat{u}_{\text{ff}} = \frac{v_{\text{ff}}^{\text{PN}}}{c} \sqrt{g_{00}} = \hat{\gamma}_{\text{ff}} \frac{\hat{v}_{\text{ff}}}{c} \sqrt{g_{00}} = \frac{\hat{v}_{\text{ff}}/c}{\sqrt{1 - \hat{v}_{\text{ff}}^2/c^2}} \sqrt{g_{00}} \quad (34)$$

$$\hat{\gamma}_K \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \hat{v}_K^2/c^2}}, \quad \hat{\gamma}_{\text{ff}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \hat{v}_{\text{ff}}^2/c^2}} \quad (35)$$

$$g_{00} \equiv 1 - \frac{a}{r} \quad (36)$$

□補正後の速度

$$\hat{u}_K = \sqrt{\frac{a}{2rg_{00}^2}} = \sqrt{\frac{ar}{2(r-a)^2}} \quad (37)$$

$$\hat{u}_{\text{ff}} = \sqrt{\frac{a}{4r}} \quad (38)$$

$$\frac{\hat{v}_K}{c} = \sqrt{\frac{a/(2r)}{a/(2r) + g_{00}^2}} = \sqrt{\frac{ar}{ar + 2(r-a)^2}} \quad (39)$$

$$\frac{\hat{v}_{\text{ff}}}{c} = \sqrt{\frac{a/(4r)}{a/(4r) + g_{00}}} = \sqrt{\frac{a}{a + 4(r-a)}} \quad (40)$$

6. 1. 円運動

万有引力のポテンシャルを擬ニュートンポテンシャルに置き換えて導くと、前回でもあったように、円運動の回転速度 v_K^{PN} は（31）式のようになる。グラフでは、図7の破線のようになる。

この（31）式を見ると、擬ニュートンポテンシャルの場合は、分母に $(r-a)$ という因子があるために、シュバルツシルト半径に近づいていくにつれ、ニュートン力学の場合よりも回転速度が大きめになることがわかる。相対論的な場合には、回転運動のエネルギーが質量と等価なために、ニュートン力学の場合よりも重力が強くなり、その強くなった重力と釣り合うために回転速度も大きめになる。擬ニュートンポテンシャルで回転速度が大きめになるのも、この相対論的效果を反映

したものだと見なしてよい。

また、(31)式を見てすぐわかるように、円運動の回転速度はシュバルツシルト半径で発散してしまう。もっとも、前回に述べたように、シュバルツシルト・ブラックホールの周辺では、シュバルツシルト半径の3倍の最終安定円軌道より内側では、円運動自体が不可能になる。したがって、その点に気をつけておけば、擬ニュートンポテンシャルのもとで円運動の回転速度がシュバルツシルト半径で発散する問題は、あまり気にしなくてよい。

ただし、擬ニュートンポテンシャルではシュバルツシルト半径で回転速度が発散するという性質に引きずられて、回転速度が相対論の値よりもさらに大きめになってしまうのだ。そしてシュバルツシルト半径の2倍くらいより内側では、精度が急激に悪化するのである。この点を問題視したアブラモヴィツたち(1996年)は、擬ニュートンポテンシャルで過大評価された回転速度を少し抑え、相対論的な値に近づけるために、ローレンツ因子 γ を利用して速度を調整することを思いついた³⁾。具体的には、

$$v \rightarrow \gamma v, \quad \gamma = 1 / \sqrt{1 - (v/c)^2}$$

という置換を行うのである。この特殊相対論的な補正を、ここでは「ローレンツ補正」と呼ぶ⁴⁾。

円運動の回転速度に対しては、(33)式の最初の等号より後半部分を見て欲しい。擬ニュートンポテンシャルで得られた(31)式の回転速度をローレンツ補正したものが(33)式で、補正後の回転速度には“^ (ハット; 山形)”を付けて区別してある。

補正後の回転速度の具体的な形は、(33)式の置換に補正前の(31)式を入れ、補正後の量について整理すればよい。そうして求めた補正後の回転速度が(39)式である。グラフでは、図7の実線のようになる。

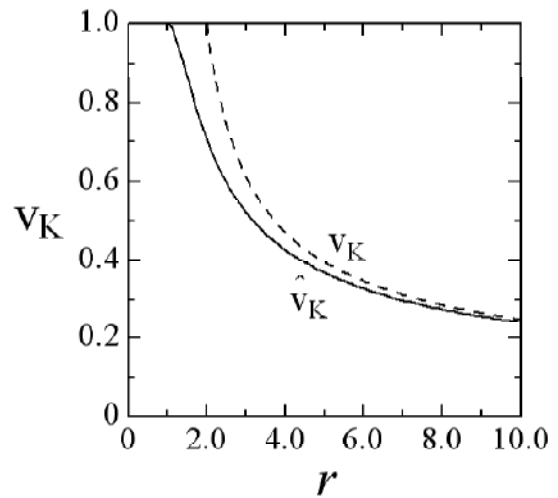


図7 回転速度。横軸はシュバルツシルト半径 a を単位とした中心からの距離 r 、縦軸は光速 c を単位とした回転速度 v_K 。破線は擬ニュートンポテンシャルで得られた補正する前の回転速度、実線は補正後の回転速度。

図7を見ると補正の効果が一目瞭然である。補正前の回転速度は(最終安定円軌道より内側はあまり意味がないとはいえ)シュバルツシルト半径の2倍の半径で光速に達していたが、補正後の回転速度は全体的に控えめになっており、シュバルツシルト半径の2倍でも光速の7割しかない。

6. 2. 自由落下

自由落下運動についても話の流れは同じだ。

万有引力のポテンシャルを擬ニュートンポテンシャルに置き換えて導くと、自由落下運動の動径速度(落下速度) $v_{\text{ff}}^{\text{PN}}$ は(32)式のようになる。グラフでは、図8の破線になる。

さて、(32)式からすぐわかるように、自由落下運動の動径速度もシュバルツシルト半径で発散してしまう。先の回転速度の場合は、円運動自体が存在できなくなるのだから発散は気にしなくてよいと言ったが、自由落下運動の場合はそうは

いかない。実際に、ブラックホールへ向けて一直線に落下する運動が可能だからだ。現実にかかる運動で物理量が発散するようなことがあっては困る。それどころか、そのような運動で落下速度が光速を超えても困る。実際に一般相対論では、観測者が測定する落下速度は、シュバルツシルト半径でちょうど光速になる。この点を問題視したのが福江（2004年 a）である⁴⁾。

また相対論では4元速度という量を必要とするが、一般相対論的な4元速度に合致させるためには、どうしても時空の曲がりの効果を考慮する必要がある。とくにシュバルツシルト時空の場合、回転方向には時空の計量は関係ないので回転速度には曲がりの効果は入らないが、半径方向には計量に変化しているので動径速度には曲がりの効果が入る。具体的には、

$$\sqrt{g_{00}} = \sqrt{1 - a/r}$$

という因子の分だけ補正が必要になるのだ。この一般相対論的な補正を、ここでは「メトリック補正」と呼ぶ⁴⁾。

自由落下運動の動径速度に対しては、(34)式を見て欲しい。擬ニュートンポテンシャルで得られた(32)式の動径速度をローレンツ&メトリック補正したものが(34)式で、補正後の量には“^”（ハット；山形）を付けて区別してある。

この(34)式の置換によって、たとえば、補正後の4元速度は(38)式のようにになる。この動径方向の4元速度は、一般相対論で得られる4元速度に完全に一致する。

さらに補正後の落下速度は(40)式である。グラフでは、図8の実線のようにになる。

図8を見るとわかるように、補正前の落下速度はシュバルツシルト半径に至る前に光速に達していたが、補正後の落下速度はちょうどシュバルツシルト半径で光速になる。

なお、ここでは、円運動と落下運動にわけて考えたが、螺旋運動や楕円軌道のように両方の運動

がある場合には、両方の速度を考慮したローレンツ因子で補正すればよい^{4) 5) 6)}。

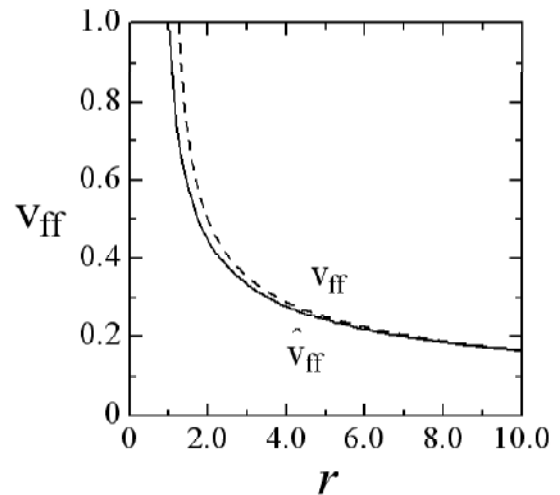


図8 落下速度。横軸はシュバルツシルト半径 a を単位とした中心からの距離 r、縦軸は光速 c を単位とした落下速度 v_{ff} 。破線は擬ニュートンポテンシャルで得られた補正する前の落下速度、実線は補正後の落下速度。

7. 音速に対する補正

つぎに、擬ニュートンポテンシャルを用いて得られる物理量の中で熱力学的な量、とくに音速を考えてみよう。

速度に対する補正の問題を考えていたときに、頭の隅に引っかかっていたのが、音速の問題である。擬ニュートンポテンシャルを用いて計算すると、後で述べるように、音速もシュバルツシルト半径で発散してしまう場合がある。これはやはり具合が悪い。相対論的な計算では、局所的な音速は、極端に相対論的な場合でも、

$$c/\sqrt{3} \sim 0.577c$$

を超えることはないのだ。発散はおろか、光速にさえ至らない。しかし、すぐには適当な表式を思いつかなかったので、音速の問題は一次棚上げに

して、速度の方のメトリック補正だけ先に仕上げることにした。

■音速の補正

□ローレンツ補正

$$(c_s^{\text{PN}})^2 = \frac{(\hat{c}_s^{\text{PN}})^2}{1 - \frac{1}{\Gamma - 1} \frac{(c_s^{\text{PN}})^2}{c^2}} \quad (41)$$

□ベルヌーイの式

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{\Gamma - 1} (c_s^{\text{PN}})^2 - \frac{GM}{r - a} = E_{\text{PN}} = 0 \quad (42)$$

□音速 under 静水圧平衡

$$(c_s^{\text{PN}})^2 = (\Gamma - 1) \frac{GM}{r - a} = (\Gamma - 1) \frac{ac^2}{2rg_{00}} \quad (43)$$

□補正後の音速 under 静水圧平衡

$$\begin{aligned} (c_s^{\text{PN}})^2 &= (\Gamma - 1) \frac{GM/(r - a)}{c^2 + GM/(r - a)} c^2 \\ &= (\Gamma - 1) \frac{ac^2}{a + 2rg_{00}} \end{aligned} \quad (44)$$

□相対論的ベルヌーイの式

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{\Gamma - 1} \frac{(c_s^{\text{GR}})^2}{c^2}} \gamma \sqrt{g_{00}} = E_{\text{GR}} = 1 \quad (45)$$

□音速 under 相対論的静水圧平衡

$$(c_s^{\text{GR}})^2 = (\Gamma - 1) (1 - \sqrt{g_{00}}) c^2 \quad (46)$$

その後、相対論的な表式などを眺めているうちに、ああ、これでいいんじゃないか、という形が出てきた。早速、静水圧平衡の場合について、補正後の音速と相対論的な音速を比べてみると、非常によく一致していることがわかったので、擬ニュートンポテンシャルで得られた音速に対する補正として提案することにした⁵⁾。そういう意味では、速度に対する補正もそうだが、音速に対する補正も、何らかの原理原則から導かれたものではなく、擬ニュートンポテンシャルで得られた物理量を改善し定量的な精度を高めるための経験的なものである。ただし、無限大に発散していた物理量を有限に抑える効果があるのだから、経験的なものとはいっても補正の意義は非常に大きいと思

う。また補正式を見ると非常に綺麗な式だなと思う、のはぼくだけかも知れないが(笑)。

ちょっと前置き(言い訳)が長くなった。擬ニュートンポテンシャルで得られた音速に対する補正式として提案したのは(41)式である。

この(41)式で、左辺が、擬ニュートンポテンシャルで得られる補正前の音速の2乗である。一方、右辺に出てくる“ $\hat{}$ (ハット;山形)”のついた量が、補正後の音速(の2乗)である。また右辺の分母に出てくる Γ は比熱比で、 c は光速である。

比熱比 Γ は一般的には温度の関数で、非相対論的な低温領域では $\Gamma = 5/3$ 、相対論的な高温領域では $\Gamma = 4/3$ になる⁷⁾。ただし、低温領域ではこのような補正はそもそも不要で、 Γ の値に関わらず(41)式右辺の分母はほぼ1になるので、ここでは(41)式右辺の分母が意味をもつ高温領域のみを念頭に置いて $\Gamma = 4/3$ で固定する。そしてその結果、補正前の音速が無限大に発散したときでも、補正後の音速が相対論的に正しい値である $c/\sqrt{3}$ に近づくという性質が付与されるのだ。この(41)式を、 $\hat{}$ のついた補正後の音速について解けばすぐ確かめられるので、実際に確認してみたい。

で、音速に対する(41)式の置換は、比熱比 Γ の部分はあるものの、速度に対するローレンツ補正と似ていることがわかる。もともと音速は局所的な量なので、時空の曲がりなどの補正は必要なく、特殊相対論的な補正だけが必要である。そこでここでは、この置換も“ローレンツ補正”と呼ぶことにしよう⁵⁾。

ではこのローレンツ補正によって、擬ニュートンポテンシャルで得られた音速の値はどの程度まで改善されるのだろうか。静水圧平衡の場合を取り上げて具体的に比較してみよう。ただし、他の問題にも適用できるように、流線に沿った流れ(あるいは一次元流)に対するベルヌーイの式からはじめることにする。

擬ニュートンポテンシャルのもとでのベルヌーイの式は、ふつうの流体力学で出てくるものとはほぼ同じだが、重力ポテンシャルの部分だけ少し変形して、(42)式のような形になる。この(42)式の左辺第一項は運動エネルギー、第二項はエンタルピーで、第三項が擬ニュートンポテンシャルのもとでの重力エネルギーである。散逸や熱伝導のない次元流では、これらの和が一定であることを、ベルヌーイの式は表している。その一定値(ベルヌーイ定数)は一般には任意の値 E_{PN} であるが、無限遠で速度 0、音速 0、重力ポテンシャル 0 とすれば、(42)式のように $E_{PN} = 0$ となる。

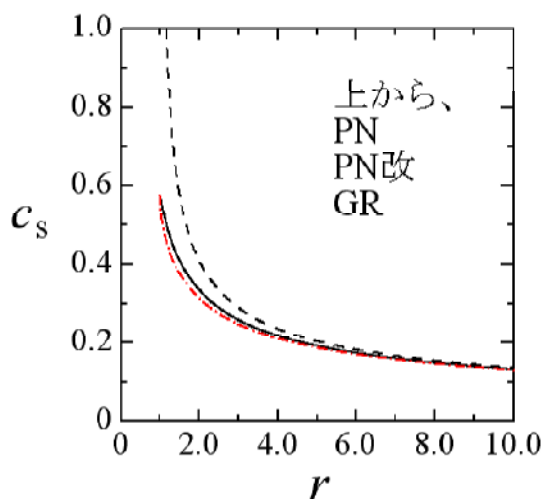


図9 静水圧平衡における音速。横軸はシュバルツシルト半径 a を単位とした中心からの距離 r 、縦軸は光速 c を単位とした音速 c_s 。破線は擬ニュートンポテンシャルで得られた補正する前の音速、実線は補正後の音速、そして一点鎖線は一般相対論での音速。

静水圧平衡は、全域で流れがない状態なので、このベルヌーイの式で速度の項を常に 0 と置けば得られる。そこで(42)式で速度の項を落とした式を変形したものが、静水圧平衡における音速

の分布を表す(43)式である。そして(43)式を見てすぐわかるように、擬ニュートンポテンシャルのもとで得られた静水圧平衡における音速は、シュバルツシルト半径で発散する。グラフでは、図9の破線になる。

一方、この補正前の音速(43)式を、音速に対するローレンツ補正の式である(41)式に入れて、補正後の量について書き直したものが、補正後の音速(44)式である。グラフでは、図9の実線になる。式でもグラフでもわかるように、このローレンツ補正によって発散の問題は解消し、補正された音速はシュバルツシルト半径で有限の値に抑えられている。

さらに相対論的な音速と比較してみよう。一般相対論的なベルヌーイの式は、導出は参考文献⁵⁾⁷⁾を見て欲しいが、(45)式のように表せる。非相対論的なベルヌーイの式では和の形になっていたものが、積の形になっていることに注意して欲しい(両辺の対数を取れば和の形になる)。すなわち、エンタルピーの項(分母に比熱比 Γ のある項)と運動エネルギーの項(ローレンツ因子 γ)と重力ポテンシャルの項(メトリック g_{00} の項)の積が一定なのである。この一定値 E_{GR} は、やはり無限遠での条件を入れると、今度は 0 にならずに、(45)式のように $E_{GR} = 1$ となる。これは相対論的なエネルギーの定義では、無限遠で静止していても、静止質量エネルギーが存在することに由来する。

この相対論的なベルヌーイの式で、全域で流れがないとすると、ローレンツ因子は常に $\gamma = 1$ とおけて、静水圧平衡の式になる。そこで(45)式で $\gamma = 1$ と置いて変形したものが、相対論的な静水圧平衡における音速の分布を表す(46)式である。グラフでは、図9の一点鎖線になる。

補正後の音速と相対論的な音速は、(44)式と(46)式を比べたのではよくわからないが、図9を見ると、補正後の音速(実線)と相対論的な音速(一点鎖線)が非常によく一致しているこ

とが見て取れるだろう。

8. おわりに

当初の心づもりでは、温度など他の物理量や、相対論的 ADAF モデルなど具体的な応用例についても紹介する予定だったが、分量が増えすぎたので割愛した。それらについては、原論文^{3) 4) 5) 6)}を参照して欲しい。

さて、前回と今回で紹介した、擬ニュートンポテンシャルとその補正は、その適用範囲などをわきまえて上手に利用すれば、相対論がまだ取っつきにくいジュニアにとっても、テンソルの嵐に疲れたシニアにとっても、非常に有用な道具になりうるだろう。

擬ニュートンポテンシャルで得られた速度そのままでは、シュバルツシルト半径近くでは精度が悪くなったり、シュバルツシルト半径より外側で光速に達してしまうなどの不具合があった。しかし、特殊相対論的なローレンツ補正や一般相対論的なメトリック補正を施すことによって、定量的には精度が改善され、定性的には発散が抑えられて速度が光速を超えないようにできることがわかった。4元速度も補正できることがわかった。同様にして、ローレンツ補正を施すことにより、音速についても格段に改善されることがわかった。先にも述べたように、あくまで経験的な処方箋ではあるが、擬ニュートンポテンシャルにおける物理量の発散という病的な問題に対する対症療法としては、現在のところ唯一の有効な処方でもある。

これらの改善点は、ブラックホール降着流での、解析的・数値的な諸計算で考慮する必要があると思う。たとえば、擬ニュートンポテンシャルのもとで遷音速流を調べる際には、物理量を補正すると音速点が移動する可能性がある。数式的には補正前の音速点が数学的な特異点になっているだろうが、物理的には補正後の音速点がより正しいものに近いと考えられる。振動現象や不安定性さらに衝撃波の問題にも影響を与えるだろう。

また、いまのところ、シュバルツシルト・ブラックホール時空を模倣する擬ニュートンポテンシャルに対しての補正のみ考案した段階である。カー・ブラックホール時空を模倣する擬ニュートンポテンシャルも提出されている⁸⁾が、そのような擬ニュートンポテンシャルに対して、補正ができるのかどうかなどは、今後の課題である。

参考文献

- 1) Paczynski, B., Wiita, P.J. 1980, A&A 88, 23
- 2) ブラックホール降着流については、たとえば、柴田一成他編、1999、『活動する宇宙』、裳華房とか、福江 純、2004、『最新天文小辞典』、東京書籍
- 3) Abramowicz, M.A. et al., 1996, A&A 313, 334
- 4) Fukue, J. 2004a, PASJ 56, 681
- 5) Fukue, J. 2004b, PASJ 56, in press
- 6) Fukue, J. 2004c, PASJ 56 submitted
- 7) Kato, S., Fukue, J., Mineshige, S. 1998, Black-Hole Accretion Disks (Kyoto Univ. Press)
- 8) Artemova, I.V. et al. 1996, ApJ 461, 565

Easy Relativity 2 :

Correction to the Pseudo-Newtonian Potential

Jun Fukue

Astronomical Institute, Osaka Kyoiku University,
Asahigaoka 4-698-1, Kashiwara, Osaka 582-8582,
Japan

Abstract : The pseudo-Newtonian potential is now widely used as a powerful tool to mimic the general relativistic effect around a Schwarzschild black hole. This potential enables high school students to calculate the relativistic phenomena. Under this potential, however, physical quantities often unphysically diverge at the Schwarzschild radius. This time, we introduce special and general relativistic corrections (Lorentz and metric

corrections) on the velocities, and a special relativistic correction (Lorentz correction) on the sound speed.