相対論的輻射輸送方程式の
解析解

Analytical Solutions of Relativistic Radiative Transfer

福江　純＠大阪教育大学

1. はじめに　解析解の意義

1. はじめに	解析的手法の意味
2. 共動系での方程式	（0）解析解自体が重要
3. Linear-Flow 近似の解	（1）質的な振る舞い
4. 物理的意味	（2）定式化の問題点
5. 今後の課題	（3）数値計算の初期条件

先行研究: Milne-Eddington sol. in the fixed frame for pp (Fukue 2008)
先行研究: Milne-Eddington sol. in the fixed frame for sph (Fukue 2010)
この研究: Linear-Flow approx. in the comoving frame for pp (Fukue 2010)
後行研究: Milne-Eddington type in the comoving frame for pp (Fukue 2010)

2. 相対論的輻射輸送方程式　—般形

mixed frame

観測系：添え字なし

共動系：添え字 0

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I}{\partial t} + (\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{\nabla}) I = \rho\gamma^3 \left(1 + \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{l}_0}{c}\right)^3$$

$$\times \left[\frac{j_0}{4\pi} - \left(\kappa_0^{\mathrm{abs}} + \kappa_0^{\mathrm{sca}}\right) I_0 + \kappa_0^{\mathrm{sca}} \frac{cE_0}{4\pi}\right], \quad (1)$$

$$cE = \int I\, d\Omega,\ \ F^i = \int I l^i\, d\Omega,\ \ cP^{ik} = \int I l^i l^k\, d\Omega$$

2. 相対論的輻射輸送方程式 鉛直方向

comoving frame

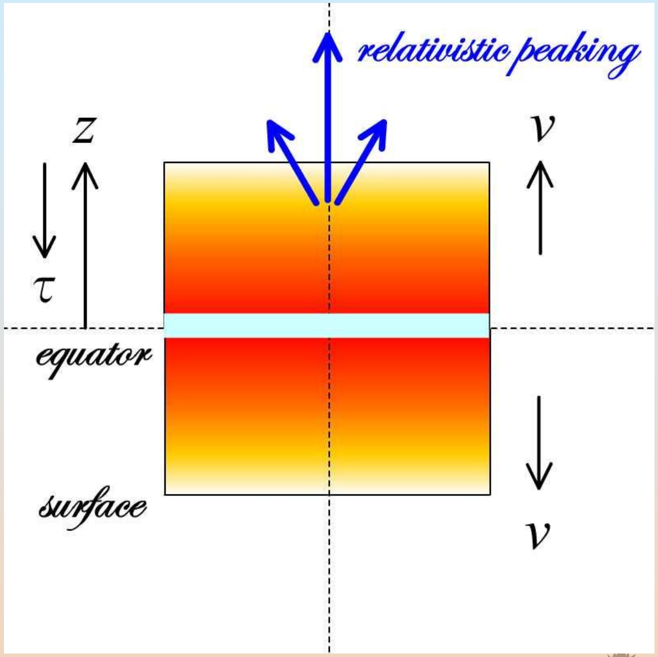
共動系での輻射強度 $I_0(z)$

鉛直座標 z

方向余弦 $\mu=\cos\theta$,　$\mu_0=\cos\theta_0$

速度 $\beta=v/c$

密度 ρ



$$\mu\frac{dI}{dz}=\rho\gamma^3(1+\beta\mu_0)^3 \times\left[\frac{j_0}{4\pi}-\left(\kappa_0^{\rm abs}+\kappa_0^{\rm sca}\right)I_0+\kappa_0^{\rm sca}\frac{cE_0}{4\pi}\right], \qquad (2)$$

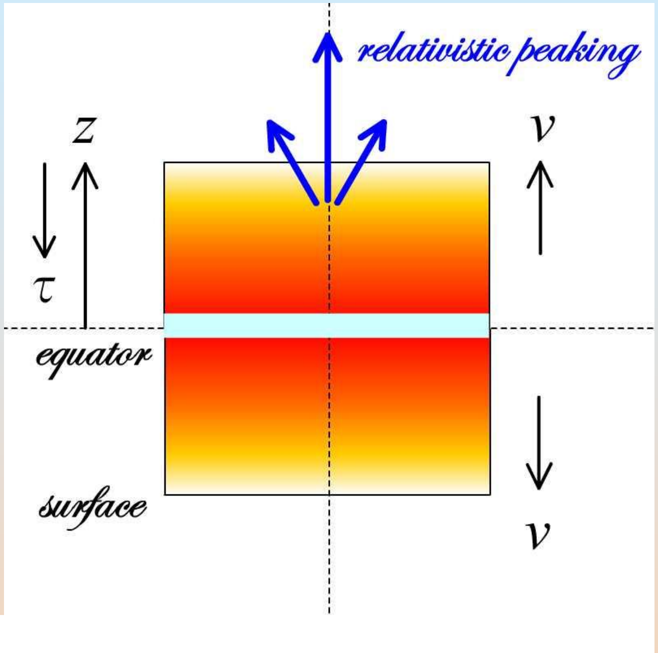
2. 相対論的輻射輸送方程式　鉛直方向

comoving frame

共動系でLTE

$$\frac{j_0}{4\pi} = \kappa_0^{\rm abs} B_0,$$

光学的厚み　$\tau = -\kappa\rho dz$



$$\mu \frac{dI}{d\tau} = \gamma^3 (1+\beta\mu_0)^3 \left[I_0 - (1-A)B_0 - AJ_0 \right],$$

where

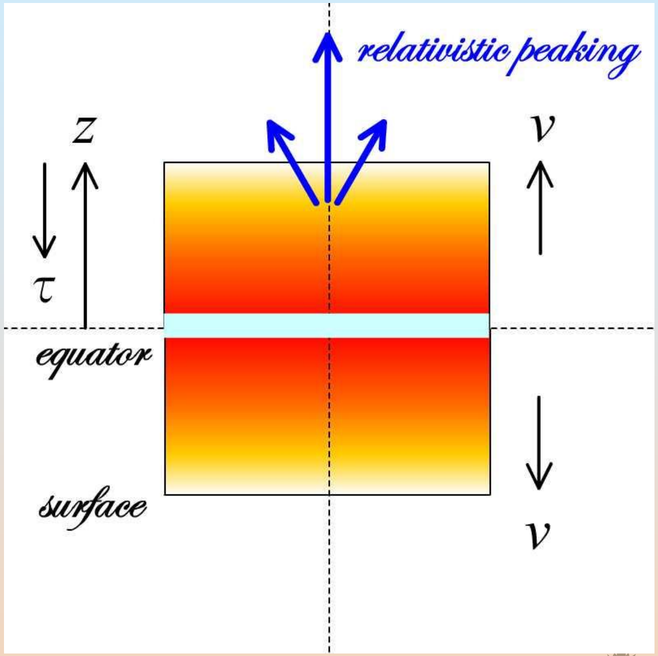
$$A \equiv \frac{\kappa_0^{\rm sca}}{\kappa_0^{\rm abs} + \kappa_0^{\rm sca}}$$

2. 相対論的輻射輸送方程式 鉛直方向

comoving frame

ドップラー効果と光行差

$$I(\tau,\mu) = \gamma^4(1+\beta\mu_0)^4 I_0(\tau,\mu_0),$$
$$\mu = \frac{\mu_0+\beta}{1+\beta\mu_0}.$$



光行差から

$$\gamma\left(\mu_0+\beta\right)\frac{dI_0}{d\tau} + \cancel{\gamma\left(\mu_0+\beta\right)I_0\frac{d}{d\tau}\ln\left[\gamma^4(1+\beta\mu_0)^4\right]}$$
$$= I_0 - AJ_0 - (1-A)B_0.$$

３．解析解 仮定と状況

- 速度一定と仮定
- Linear-Flow 近似 : $I_0(\tau,\mu_0) \Rightarrow I_0^+(\tau), I_0^-(\tau)$

- 共動系での相対論的輻射輸送方程式の解析解を求める。

$$\gamma(1+\beta)\frac{dI_0^+}{d\tau} = I_0^+ - AJ_0 - (1-A)B_0,$$

$$\gamma(1-\beta)\frac{dI_0^-}{d\tau} = -I_0^- + AJ_0 + (1-A)B_0.$$

3. 解析解　散乱のみ(A=1)

- 方程式

$$\gamma(1+\beta)\frac{dI_0^+}{d\tau}=\frac{1}{2}I_0^+-\frac{1}{2}I_0^-,$$
$$\gamma(1-\beta)\frac{dI_0^-}{d\tau}=\frac{1}{2}I_0^+-\frac{1}{2}I_0^-.$$

- 一般解

$$I_0^+=C_0e^{-\gamma\beta\tau}+\frac{D_0}{2\beta},$$
$$I_0^-=C_0\frac{1+\beta}{1-\beta}e^{-\gamma\beta\tau}+\frac{D_0}{2\beta},$$

3. 解析解　散乱のみ(A=1)

- 境界条件:　$I_0^-(0) = 0 \quad \text{at} \quad \tau = 0$
- 特殊解

指数的振る舞い

$$I_0^+ = \frac{H_{00}}{\beta}\left(1 - \frac{1-\beta}{1+\beta}e^{-\gamma\beta\tau}\right),$$

$$I_0^- = \frac{H_{00}}{\beta}\left(1 - e^{-\gamma\beta\tau}\right),$$

$$J_0 = \frac{H_{00}}{\beta}\left(1 - \frac{1}{1+\beta}e^{-\gamma\beta\tau}\right),$$

$$H_0 = \frac{H_{00}}{1+\beta}e^{-\gamma\beta\tau}.$$

NR

$$I_0^+ = H_{00}(\tau + 2),$$

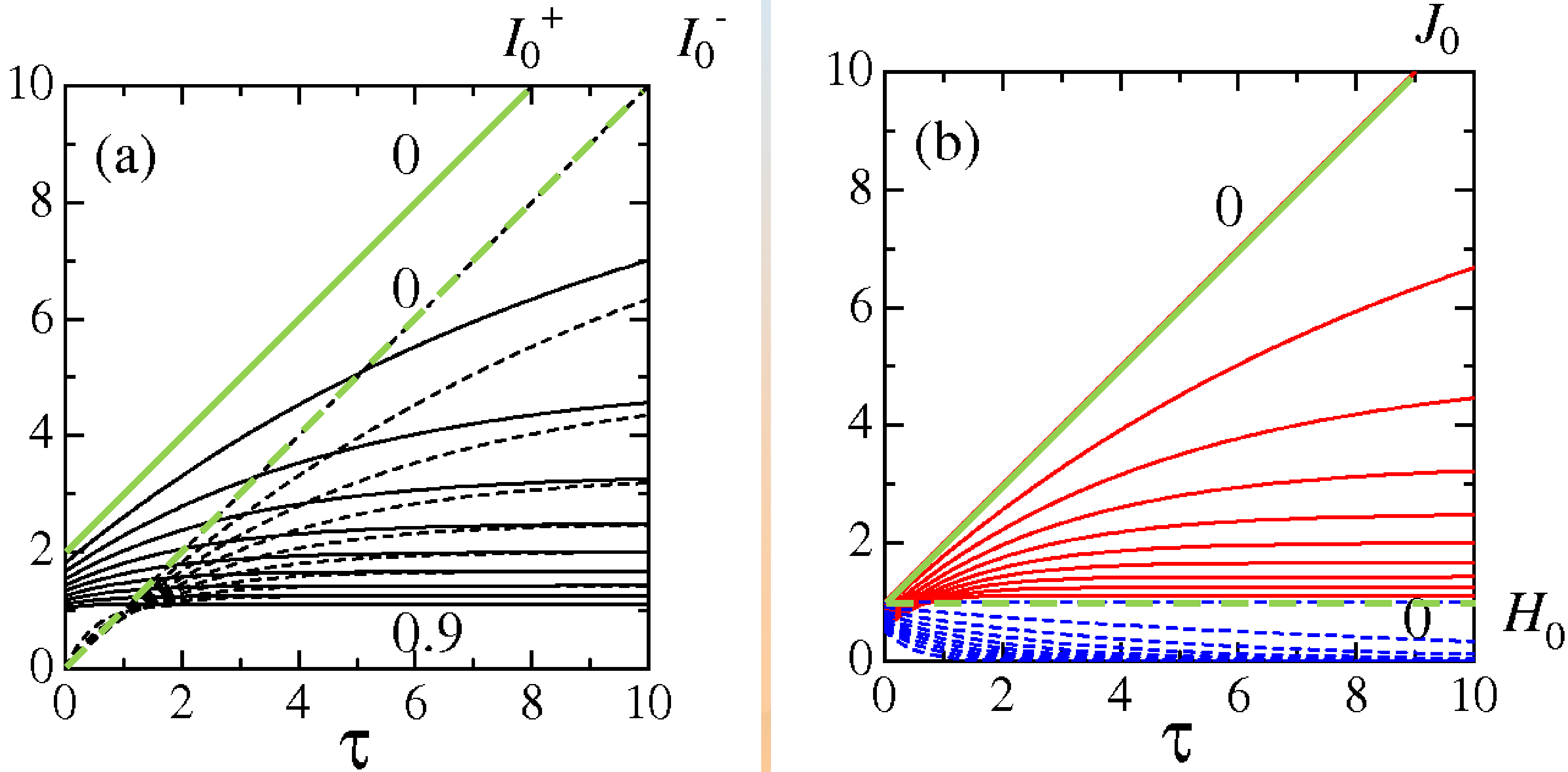
$$I_0^- = H_{00}\tau,$$

$$J_0 = H_{00}(\tau + 1),$$

$$H_0 = H_{00}.$$

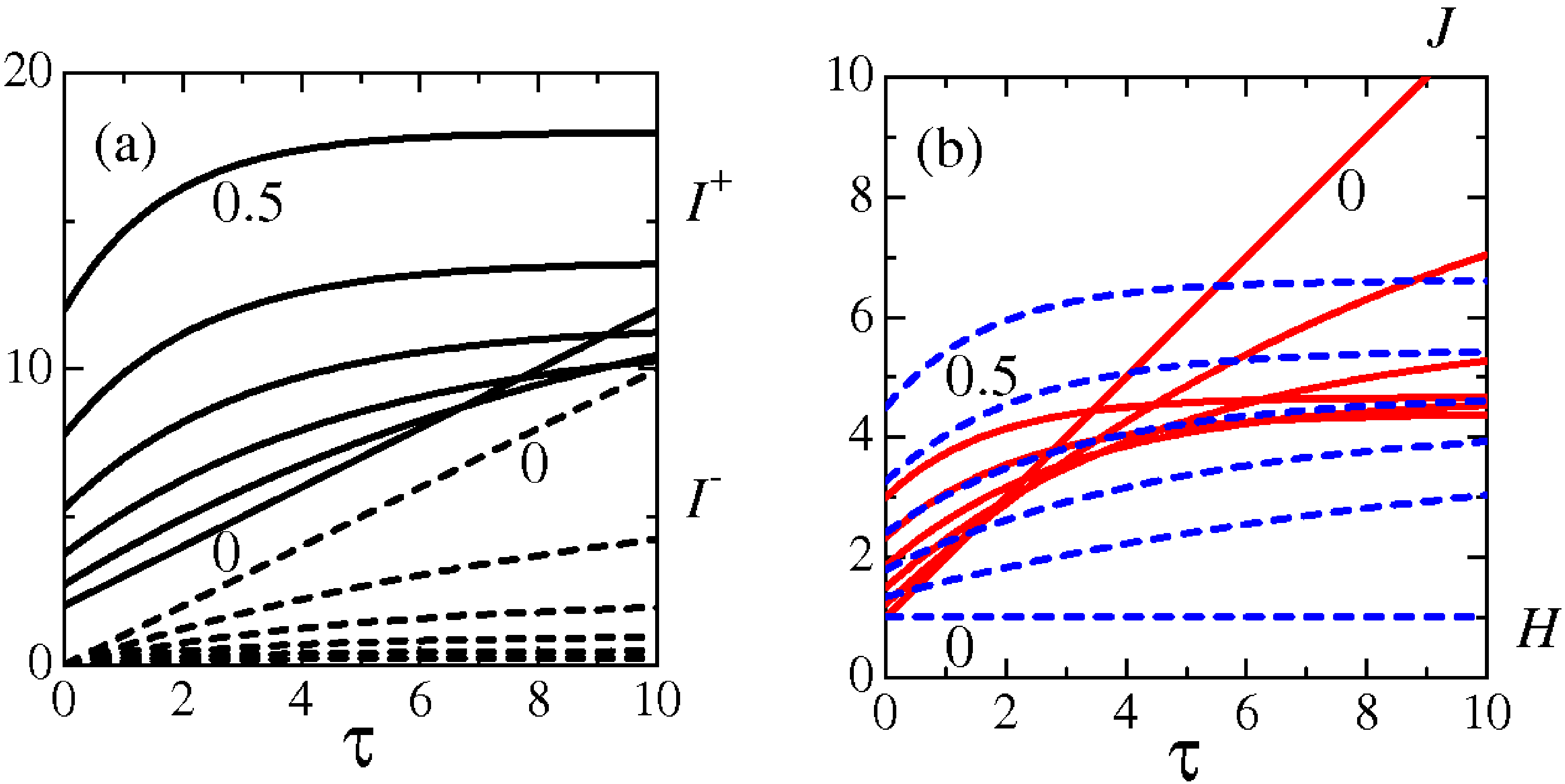
3. 解析解　散乱のみ(A=1)

- 共動系



3. 解析解　散乱のみ(A=1)

- 観測系



３．解析解　一般($A<>1$)

- 方程式

$$\gamma(1+\beta)\frac{dI_0^+}{d\tau} = \left(1-\frac{A}{2}\right)I_0^+ - \frac{A}{2}I_0^- - (1-A)B_0,$$

$$\gamma(1-\beta)\frac{dI_0^-}{d\tau} = -\left(1-\frac{A}{2}\right)I_0^- + \frac{A}{2}I_0^+ + (1-A)B_0$$

- 斉次の一般解

$$I_0^+ = C_1 e^{\Gamma\tau} + C_2 e^{-\Gamma\tau},$$

$$I_0^- = C_1 P e^{\Gamma\tau} + C_2 Q e^{-\Gamma\tau},$$

where

$$\Gamma = -\left(1-\frac{A}{2}\right)\gamma\beta \pm \sqrt{\left(1-\frac{A}{2}\right)^2\gamma^2\beta^2 + 1 - A},$$

$$P = \frac{2-A-2\gamma(1+\beta)\Gamma}{A} = \frac{A}{2-A+2\gamma(1-\beta)\Gamma},$$

$$Q = \frac{2-A+2\gamma(1+\beta)\Gamma}{A} = \frac{A}{2-a-2\gamma(1-\beta)\Gamma}.$$

３. 解析解　一般(*A*<>1)

- B_0=一定
- 非斉次の特殊解

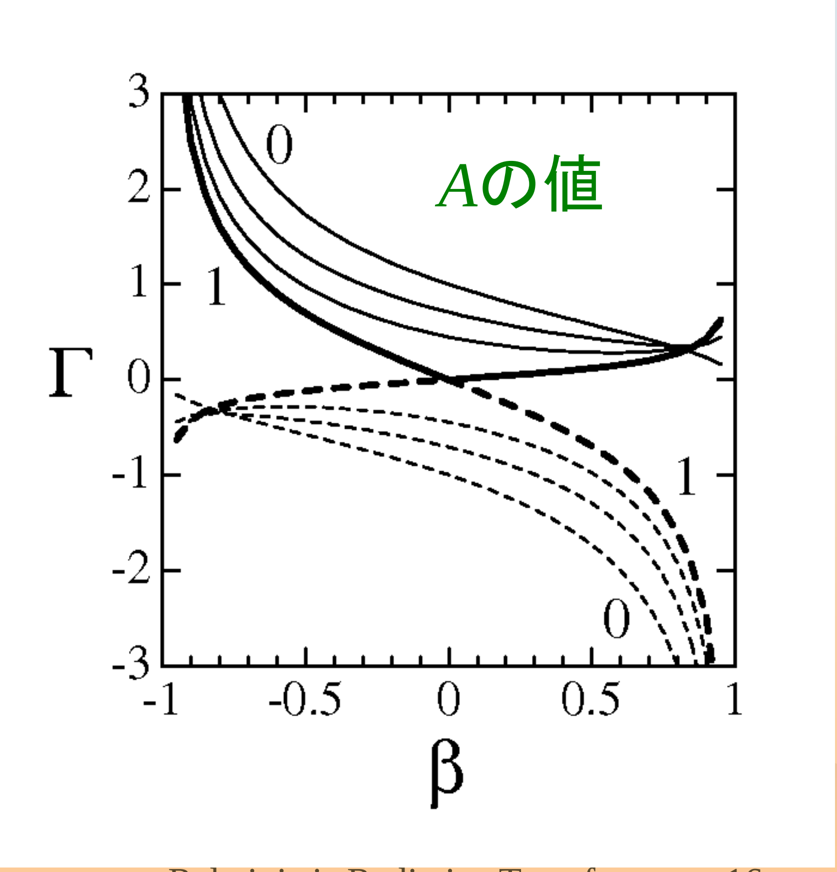
指数的振る舞い

$$I_0^+ = C_1 e^{\Gamma\tau} + C_2 e^{-\Gamma\tau} + \frac{1-\beta+\beta A}{(1+\beta)\Gamma^2}(1-A)B_0,$$

$$I_0^- = C_1 P e^{\Gamma\tau} + C_2 Q e^{-\Gamma\tau} - \frac{(1+\beta)(P+Q)+2(1-\beta)PQ}{(P-Q)\Gamma}\gamma(1-A)B_0.$$

３．解析解　ー般(A<>1)

- 指数Γの振る舞い



4．議論　物理的意味

- 共動系でエディントン近似（f=1/3）を用いたモーメント定式化では、$v=c/\sqrt{3}$で特異性が出現
- Linear-Flow近似（$\mu_0=\pm 1$）では特異性なし
- Two-Stream近似（$\mu_0=1/3$）では特異性あり
  - 特異性の出現：$\beta=\pm\mu_0$
- 特異性の原因は光行差に他ならない
  - 非等方な輻射場を角度展開した際に、モーメント定式化では有限項で打ち切るため
- 速度依存エディントン因子の利便性

４．議論　まとめ

解析的手法の意味

（０）解析解自体が重要

（１）質的な振る舞い

（２）定式化の問題点

（３）数値計算の初期条件

FLDはτ＜1で役立たず！

（Akizuki 2010, Dr thesis）

本研究の場合

（０）輻射輸送の解析解はそれ自体が稀少

（１）指数関数的な振る舞い：exp（$-\Gamma\tau$）が基本

$$\Gamma = \Gamma(v, A)$$

（２）E近似における特異点の原因は光行差

（３）比較以前に、新しいコードの開発が急務

4. 議論　今後の課題

相対論的輻射流体力学に関して

基礎研究

- 他のタイプの解析解
- 変動エディントン因子
- 数値シミュレーションコード

応用研究

- ブラックホール流
- ガンマ線バースト