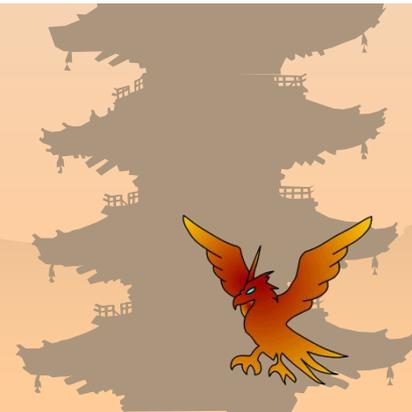




相對論的輻射輸送

Relativistic Radiative Transfer and Moment Formalism

福江 純 @ 大阪教育大学





目次

- 0 準備
 - 1. 平均自由行程
 - 2. 光学的厚み
- 1 相対論的輻射輸送方程式とモーメント方程式および問題点
 - 1. ガス系の方程式
 - 2. 輻射系の方程式
 - 3. クロージャー関係式
- 2 相対論的輻射輸送(速度一定)の解析解
- 3 相対論的形式解
- 4 相対論的平行平板流における相対論的輻射輸送とエディントン因子の振る舞い
- 5 今後の課題





相對論的輻射輸送

0 準備

Radiative Transfer
0 Preparation





平均自由行程 1

大阪教育大から眺めた大阪市内

- ❁ “光(光線)は直進する”と習うが、これは**ウソ**である。
- ❁ 晴れた日には数km先まで見えるが靄が濃いときには1m先ぐらいまでしか見えないこともある。星間空間では何万光年も彼方の星が見えるが、太陽内部では**0.5cm**先ぐらいまでしか見えない。
- ❁ **平均自由行程 (mean free path)**: 物質に邪魔されずに光が進める距離。間にある物質の量や状態で変わる
- ❁ 粒子(物質)と光子からなる世の中では**“光線は平均自由行程だけ直進する”**

晴れた日



雨の日



黄砂の日





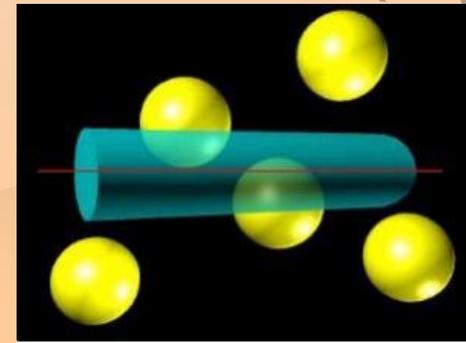
平均自由行程2

- 光の平均自由行程 λ は、ガス密度 ρ と(他の全部の要素を含む)不透明度 κ の積に反比例する:

$$\lambda = \frac{1}{\kappa\rho}$$

- 平均自由行程 λ はもちろん[cm]の単位をもつ。
- たとえば、太陽内部では、密度は平均的に 1g/cm^3 程度で、不透明度は $1\text{cm}^2/\text{g}$ 程度なので、平均自由行程は1cmのオーダーになる。
- ガス粒子の個数密度 n と衝突断面積 σ でも表せる:

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma}$$





光学的深さ1

- ❁ 光子の輸送という観点から、光が感じる“距離”として、実距離の代わりに、
「**光学的深さ(optical depth) / 光学的厚み(optical thickness)**」
を使う。
- ❁ 光が通過した実距離 ds と物質密度 ρ と不透明度 κ を用いると、光学的深さ $d\tau$ は、以下のように定義される：

$$d\tau = \kappa\rho ds, \quad \tau = \int \kappa\rho ds$$

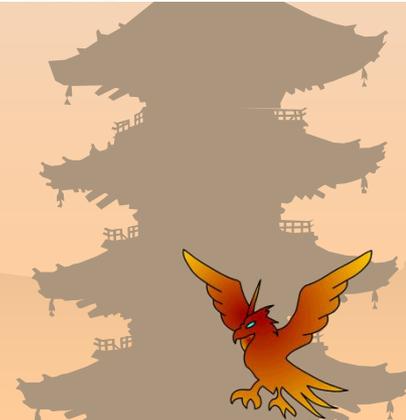
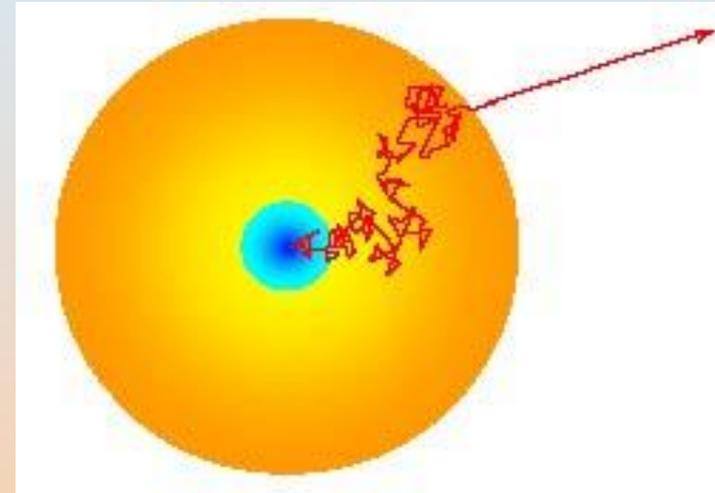
- ❁ 光学的深さの単位は**無次元**である。
- ❁ 平均自由行程との関連で言えば、
光学的深さが1になる距離が平均自由行程に他ならない。





光学的深さ2

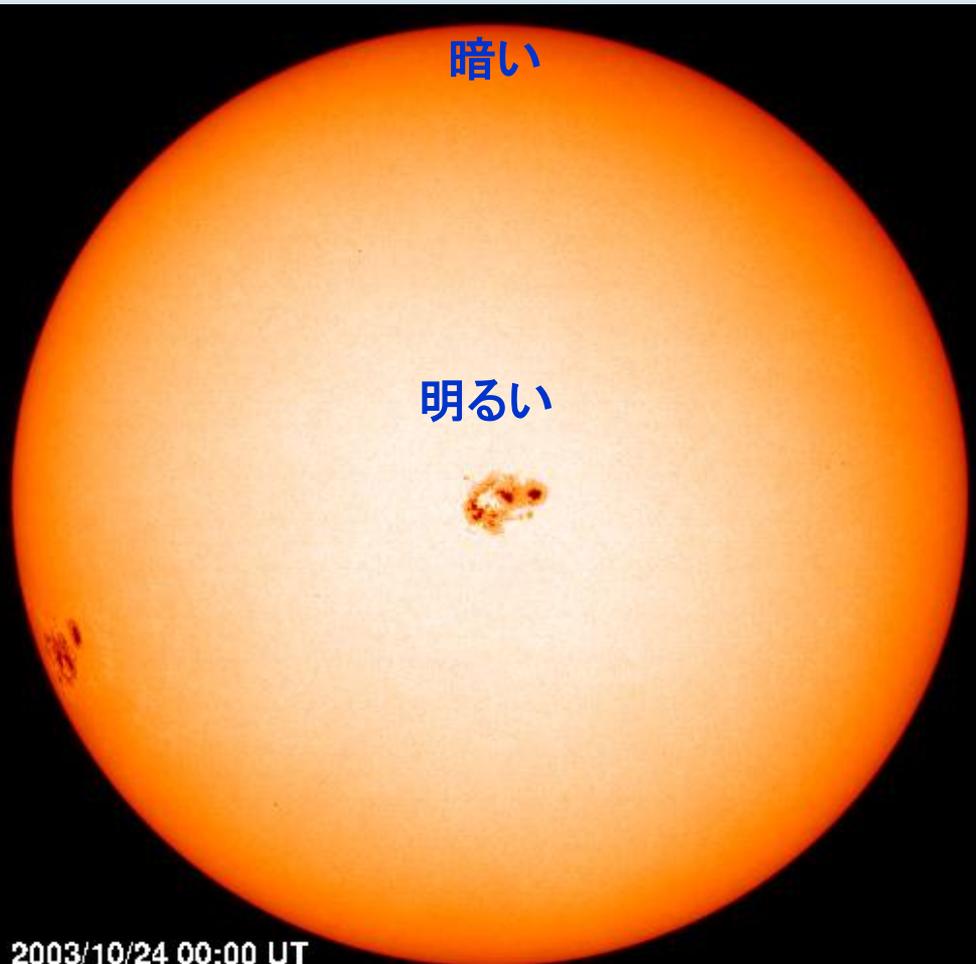
- ❁ 太陽半径70万kmは太陽内部の平均自由行程0.5cmの約 10^{11} 倍なので、太陽表面から中心までの光学的深さも 10^{11} ほどになる。
- ❁ N 回のランダムウォークで進む距離は、平均自由行程の \sqrt{N} 倍程度なので、太陽半径進むには、 $N=(10^{11})^2=10^{22}$ となり、道のりにして、 10^{22} cmぐらいになるので、光速で 10^4 年かかる。



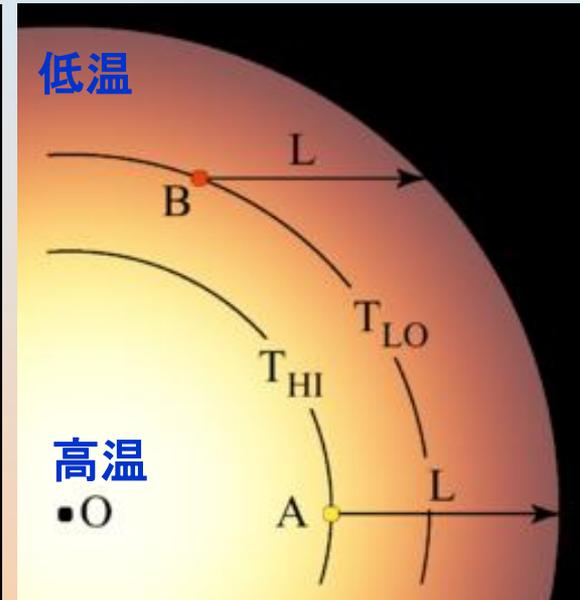


太陽の周縁減光効果

❁ 太陽の正面写真



❁ 太陽の断面図



周縁部
浅い場所
低温
暗い

中央部
深い場所
高温
明るい

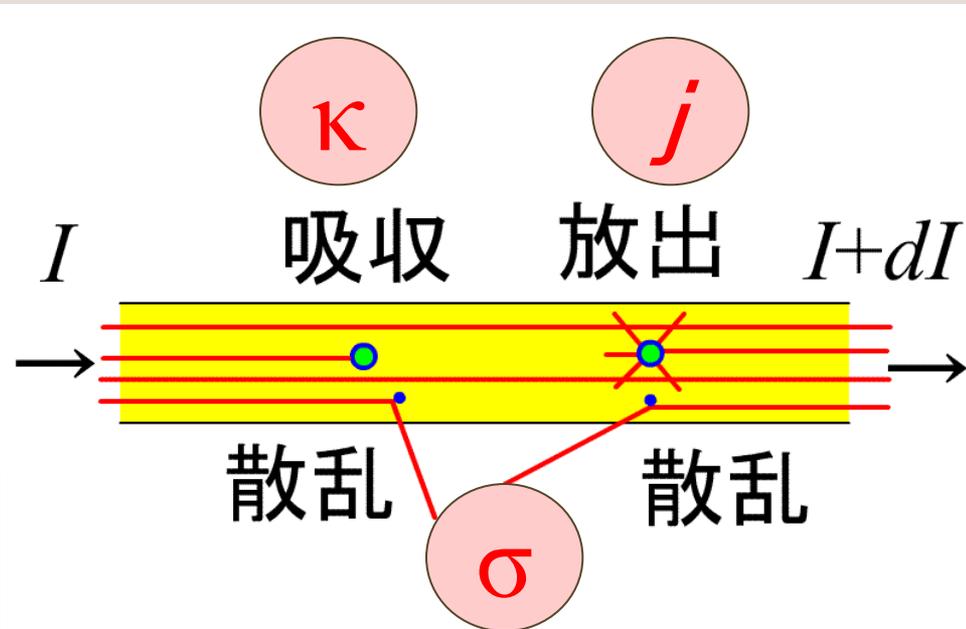
❁ どこを視ているのか





吸収と散乱

- 平均自由行程進むと、物質粒子によって**吸収 (absorption)** や **散乱 (scattering)** を受ける。
- 吸収は光子を破壊し、再放出する→局所熱平衡に近づける
- 散乱(トムソン散乱)は光子の方向のみ変える→等方化作用



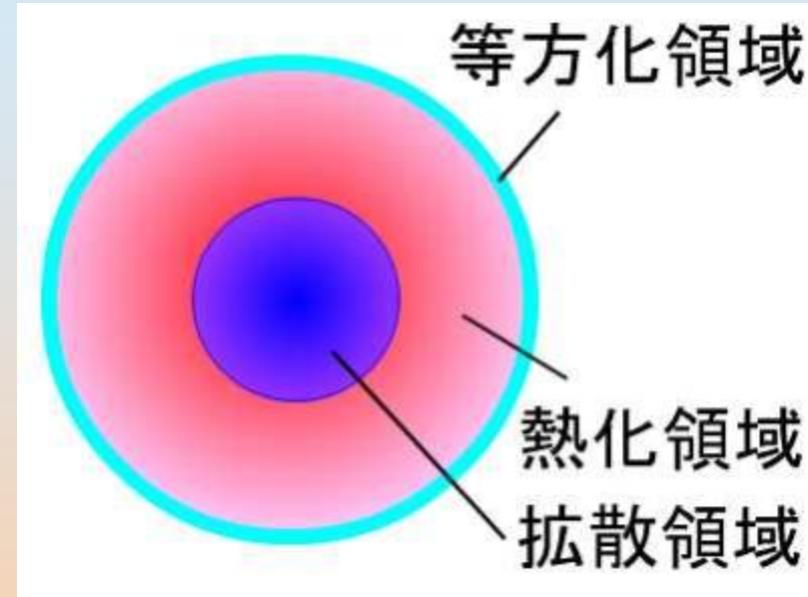
$$2014/3/6 \quad dI = (j/4\pi)\rho ds - (\kappa + \sigma)\rho Ids + \sigma \rho (cE/4\pi) ds$$





拡散領域－自由流領域1

- ❁ **拡散領域**:十分に光学的に厚い内部領域では、ガスと輻射はほぼ完全に**局所熱平衡(LTE)**になっており、輻射場は黒体放射で、拡散近似が成り立っている。
- ❁ 局所的には拡散は等方的に起こるが、大局的には光子密度の負の勾配方向へ起こる。
- ❁ **熱化領域**:その周辺では、ガスと輻射は近似的に熱平衡で、拡散近似も少し悪くなる。



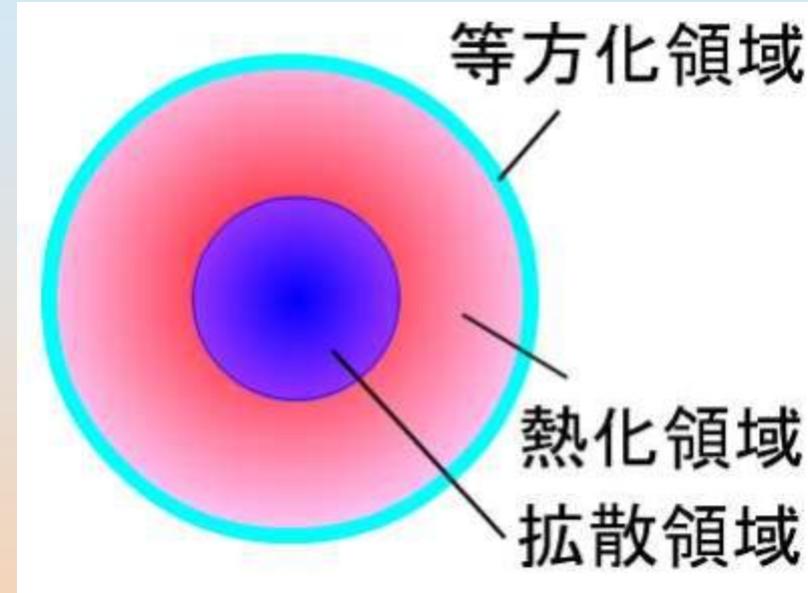
$$F^i = -\frac{1}{\kappa\rho} \nabla P^{ik}$$





拡散領域－自由流領域2

- 等方化領域**: 光学的厚みが1 (平均自由行程) 程度の表面境界層では、拡散近似は破れ、輻射場は黒体放射ではなくなる。ただし、散乱などによって輻射場は簡単に等方的になるので、この境界層でもエディントン近似は成り立っている。
- ダイナミクス**は中心部分が左右するが、**スペクトル**は表面部分が決める。



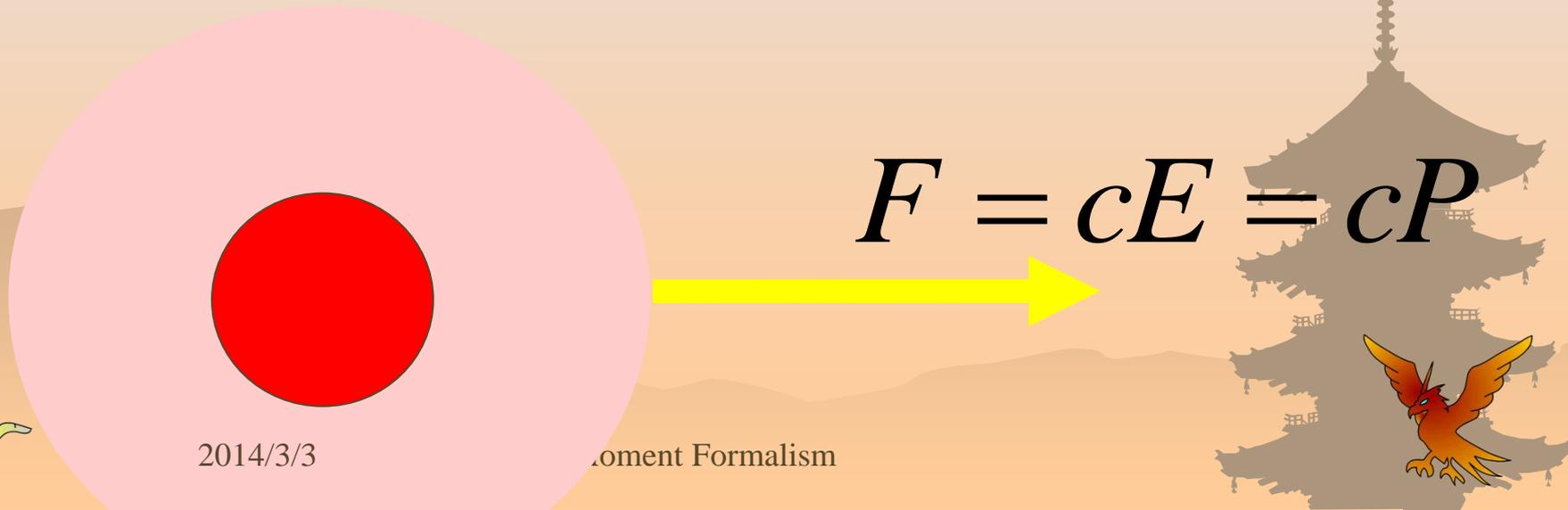
$$P^{ik} = \frac{\delta^{ik}}{3} E$$





拡散領域－自由流領域3

- 自由流領域: 光学的に薄くなると、たとえば、太陽表面付近から惑星間空間のような平均自由行程が十分に長い領域では、光子は吸収も散乱もほとんど受けずに、光源から反対方向へ向けて、“自由流”として直進する。





輻射場の物理量1 physics/frequency-dependent

光子の流れ(輻射)は、エネルギーと運動量を運び、周辺のガスに圧力(応力)を及ぼす。

輻射強度 $I_\nu(\mathbf{r}, t, \mu)$ [erg/s/cm²/sr/Hz]: 単位時間単位面積あたりに単位立体角方向へ輻射が運ぶエネルギー

輻射エネルギー密度 $E_\nu(\mathbf{r}, t)$ [erg/cm³/Hz]: 単位体積あたりの輻射のエネルギー

輻射流束 $F_\nu(\mathbf{r}, t)$ [erg/s/cm²/Hz] = $c \times$ [erg/cm³/Hz]: 単位時間単位面積あたりに輻射が運ぶエネルギー

輻射圧 $P_\nu(\mathbf{r}, t)$ [dyn/cm²/Hz] = [erg/cm³/Hz]: 単位面積あたりの輻射の力

$$\begin{aligned}
 E_\nu &\equiv \frac{1}{c} \int I_\nu d\Omega, & E &\equiv \int E_\nu d\nu, \\
 \mathbf{F}_\nu &\equiv \int I_\nu \mathbf{l} d\Omega, & \mathbf{F} &\equiv \int \mathbf{F}_\nu d\nu, \\
 P_\nu^{ij} &\equiv \frac{1}{c} \int I_\nu l^i l^j d\Omega, & P^{ij} &\equiv \int P_\nu^{ij} d\nu,
 \end{aligned}$$





輻射場の物理量1 physics/frequency-integrated

光子の流れ(輻射)は、エネルギーと運動量を運び、周辺のガスに圧力(応力)を及ぼす。

輻射強度 $I(\mathbf{r}, t, \mu)$ [erg/s/cm²/sr]: 単位時間単位面積あたりに単位立体角方向へ輻射が運ぶエネルギー

輻射エネルギー密度 $E(\mathbf{r}, t)$ [erg/cm³]: 単位体積あたりの輻射のエネルギー

輻射流束 $F(\mathbf{r}, t)$ [erg/s/cm²] = $c \times$ [erg/cm³]: 単位時間単位面積あたりに輻射が運ぶエネルギー

輻射圧 $P(\mathbf{r}, t)$ [dyn/cm²] = [erg/cm³]: 単位面積あたりの輻射の力

利点: エネルギーなど
物理量として理解しや
すく扱いやすい

$$E_\nu \equiv \frac{1}{c} \int I_\nu d\Omega,$$

$$\mathbf{F}_\nu \equiv \int I_\nu \mathbf{l} d\Omega,$$

$$P_\nu^{ij} \equiv \frac{1}{c} \int I_\nu l^i l^j d\Omega,$$

$$E \equiv \int E_\nu d\nu,$$

$$\mathbf{F} \equiv \int \mathbf{F}_\nu d\nu,$$

$$P^{ij} \equiv \int P_\nu^{ij} d\nu,$$



輻射場の物理量 1 astronomy/frequency-dependent

光子の流れ(輻射)は強く非等方でないとして、等方性からのずれの成分で展開する。

輻射強度 $I_\nu(\mathbf{r}, t, \mu)$ [erg/s/cm²/sr/Hz]: 単位時間単位面積あたりに単位立体角方向へ輻射が運ぶエネルギー

平均強度 $J_\nu(\mathbf{r}, t)$ [erg/s/cm²/sr/Hz]: 輻射強度を角度方向で平均した等方成分

エディントン流束 $H_\nu(\mathbf{r}, t)$ [erg/s/cm²/sr/Hz]: 等方性からのずれの単位立体角あたりの値

K積分 $K_\nu(\mathbf{r}, t)$ [erg/s/cm²/sr/Hz]: 等方性からのずれの、さらに高次の成分

$$\begin{aligned}
 J_\nu &\equiv \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\Omega, & J &\equiv \int J_\nu d\nu, \\
 H_\nu &\equiv \frac{1}{4\pi} \int I_\nu \mu d\Omega, & H &\equiv \int H_\nu d\nu, \\
 K_\nu^{ij} &\equiv \frac{1}{4\pi} \int I_\nu \mu^i \mu^j d\Omega, & K^{ij} &\equiv \int K_\nu^{ij} d\nu,
 \end{aligned}$$





輻射場の物理量 1 astronomy/frequency-integrated

光子の流れ(輻射)は強く非等方でないとして、等方性からのずれの成分で展開する。

輻射強度 $I(\mathbf{r}, t, \mu)$ [erg/s/cm²/sr]: 単位時間単位面積あたりに単位立体角方向へ輻射が運ぶエネルギー

平均強度 $J(\mathbf{r}, t)$ [erg/s/cm²/sr]: 輻射強度を角度方向で平均した等方成分

エディントン流束 $H(\mathbf{r}, t)$ [erg/s/cm²/sr]: 等方性からのずれの単位立体角あたりの値

K積分 $K(\mathbf{r}, t)$ [erg/s/cm²/sr]: 等方性からのずれの、さらに高次の成分

利点: どの量も次元が同じなので、操作しやすく、式も簡単になる

$$\begin{aligned}
 J_\nu &\equiv \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\Omega, & J &\equiv \int J_\nu d\nu, \\
 H_\nu &\equiv \frac{1}{4\pi} \int I_\nu l d\Omega, & H &\equiv \int H_\nu d\nu, \\
 K_\nu^{ij} &\equiv \frac{1}{4\pi} \int I_\nu l^i l^j d\Omega, & K^{ij} &\equiv \int K_\nu^{ij} d\nu,
 \end{aligned}$$



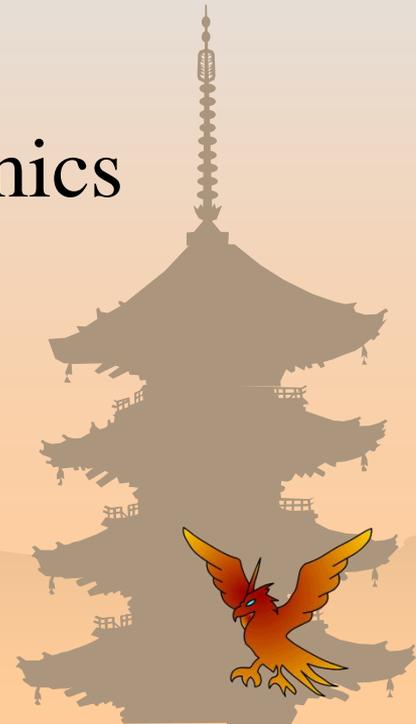


相対論的輻射輸送

1 相対論的輻射輸送方程式と モーメント定式化

Relativistic Radiation Hydrodynamics

**1 Moment Formalism
of Relativistic Radiation
Hydrodynamics**





相対論的輻射流体力学の定式化

Thomas, L.H. 1930, Quart. J. Math 1, 239

Hazlehurst, J., Sargent, W.L.W. 1959, ApJ 130, 276

Lindquist, R.W. 1966, Annals Phys. 37, 487

Castor, J.I. 1972, ApJ 178, 779

Anderson, J.L., Spiegel, E.A. 1972, ApJ 171, 127

Hsieh, S.-H., Spiegel, E.A. 1976, ApJ 207, 244

Thorne, K.S. 1981, MNRAS 194, 439

Udey, N., Israel, W. 1982, MNRAS 199, 1137

Mihalas, D., Klein, R.I. 1982, J.Comp.Phys. 46, 97

Mihalas, D., Mihalas, B.W. 1984, Foundations of Radiation Hydrodynamics (Oxford University Press)

Park, M.-G. 1993, A&A 274, 642

Mihalas, D., Auer, L.H. 2001, JQSRT 71, 61

一般相対論的輻射流体力学の方程式系が成分で書き下されたのはごく最近

Park, M.-G. 2006, MNRAS 367, 1739

Takahashi, R. 2007, MNRAS 382, 1041





2. RRHD Moment Formalism

Moment equations for matter

- ✿ continuity
- ✿ momentum
- ✿ energy

In the comoving frame

$$cE_0 = \int I_0 d\Omega_0, F_0^i = \int I_0 l_0^i d\Omega_0,$$

$$cP_0^{ik} = \int I_0 l_0^i l_0^k d\Omega$$

In the inertial frame

$$cE = \int I d\Omega, F^i = \int \Pi^i d\Omega,$$

$$cP^{ik} = \int \Pi^i l^k d\Omega$$

2014/3/3



$$(nu^\mu)_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} nu^\mu) = 0, \quad (\text{E.53})$$

$$\begin{aligned} & c^2 \left(u^\mu \frac{\partial u^i}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^i u^\mu u^\nu \right) \\ &= \frac{c^2}{\varepsilon + p} (g^{i\mu} - u^i u^\mu) \frac{\partial p}{\partial x^\mu} + \frac{\rho c^2}{\varepsilon + p} \frac{1}{c} (\kappa_0^{\text{abs}} + \kappa_0^{\text{sca}}) \\ & \quad \times \left[F_0^i + \frac{\gamma - 1}{v^2} v^i (\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_0) \right] \\ &= \frac{c^2}{\varepsilon + p} (g^{i\mu} - u^i u^\mu) \frac{\partial p}{\partial x^\mu} + \frac{\rho c^2}{\varepsilon + p} \frac{\gamma}{c} (\kappa_0^{\text{abs}} + \kappa_0^{\text{sca}}) \\ & \quad \times \left[F^i - \gamma^2 E v^i - v_k P^{ik} + \gamma^2 v^i \left(\frac{2\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{c^2} - \frac{v_j v_k}{c^2} P^{jk} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.57})$$

$$\begin{aligned} & \frac{c}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} [\sqrt{-g} (\varepsilon - \rho c^2) u^\mu] + c \frac{p}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} u^\mu) \\ &= -\rho (j_0 - c \kappa_0^{\text{abs}} E_0) \\ &= \gamma^2 \rho \left(-\frac{j_0}{\gamma^2} + c \kappa_0^{\text{abs}} E - \kappa_0^{\text{abs}} \frac{2\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{c} + \kappa_0^{\text{abs}} \frac{v_i v_k}{c} P^{ik} \right). \end{aligned} \quad (\text{E.60})$$



2. RRHD Transfer Equation

E.2.1 Transfer Equation

As in the case of a non-relativistic regime (appendix D), a change in the specific intensity is expressed by the *transfer equation*, although it should be written down in a Lorentz-invariant form.

By means of the Lorentz invariant $f (= I_\nu/\nu^3 = I_{\nu 0}/\nu_0^3)$, we can write the transfer equation of the form (Hsieh and Spiegel 1976):

$$k^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = \rho (\alpha - \beta f) - \rho \kappa_{\nu 0}^{\text{sca}} \int \phi_\nu(\mathbf{l}', \mathbf{l}) f(\mathbf{l}) \nu' d\nu' d\Omega' + \rho \kappa_{\nu 0}^{\text{sca}} \int \phi_\nu(\mathbf{l}, \mathbf{l}') f(\mathbf{l}') \nu' d\nu' d\Omega', \quad (\text{E.33})$$

Furthermore, replacing f by I_ν (or $I_{\nu 0}$), we finally obtain the (angle-dependent) *radiative transfer equation*:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + (\mathbf{l} \cdot \nabla) I_\nu = \left(\frac{\nu}{\nu_0} \right)^2 \rho \times \left[\frac{j_{\nu 0}}{4\pi} - (\kappa_{\nu 0}^{\text{abs}} + \kappa_{\nu 0}^{\text{sca}}) I_{\nu 0} + \frac{3}{4} \kappa_{\nu 0}^{\text{sca}} \frac{c}{4\pi} \left(E_{\nu 0} + l_{0i} l_{0j} P_{\nu 0}^{ij} \right) \right], \quad (\text{E.37})$$





2. RRHD Transfer Equation

Integrating the transfer equation (E.37) over the frequency, with the help of the Lorentz transformation (E.14) [$d\nu = (d\nu/d\nu_0)d\nu_0 = (\nu/\nu_0)d\nu_0 = \gamma(1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{l}_0/c)d\nu_0$], we obtain a frequency-integrated angle-dependent transfer equation:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + (\mathbf{l} \cdot \nabla) I = \rho \gamma^3 \left(1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{l}_0}{c} \right)^3 \times \left[\frac{j_0}{4\pi} - (\kappa_0^{\text{abs}} + \kappa_0^{\text{sca}}) I_0 + \frac{3}{4} \kappa_0^{\text{sca}} \frac{c}{4\pi} \left(E_0 + l_{0i} l_{0j} P_0^{ij} \right) \right], \quad (\text{E.38})$$

where

$$I \equiv \int I_\nu d\nu, \quad I_0 \equiv \int I_{\nu 0} d\nu_0, \quad (\text{E.39})$$

$$E_0 \equiv \int E_{\nu 0} d\nu_0, \quad P_0^{ij} \equiv \int P_{\nu 0}^{ij} d\nu_0, \quad (\text{E.40})$$

$$j_0 \equiv \int j_{\nu 0} d\nu_0, \quad \kappa_0^{\text{abs}} + \kappa_0^{\text{sca}} \equiv \frac{1}{I_0} \int (\kappa_{\nu 0}^{\text{abs}} + \kappa_{\nu 0}^{\text{sca}}) I_{\nu 0} d\nu_0. \quad (\text{E.41})$$





2. RRHD Moment Formalism

Moment equations for radiation

- 0th moment
- 1st moment

In the comoving frame

$$cE_0 = \int I_0 d\Omega_0, F_0^i = \int I_0 l_0^i d\Omega_0, cP_0^{ik} = \int I_0 l_0^i l_0^k d\Omega_0$$

In the inertial frame

$$cE = \int I d\Omega, F^i = \int I l^i d\Omega, cP^{ik} = \int I l^i l^k d\Omega$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = \rho\gamma \left(j_0 - c\kappa_0^{\text{abs}} E + \kappa_0^{\text{abs}} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{c} \right) + \rho\gamma^3 \kappa_0^{\text{sca}} \left[\frac{v^2}{c} E + \frac{v_i v_j}{c} P^{ij} - \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{c} \right], \quad (\text{E.44})$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial F^i}{\partial t} + \frac{\partial P^{ik}}{\partial x^k} = \frac{\rho\gamma}{c} \left(\frac{v^i}{c} j_0 - \kappa_0^{\text{abs}} F^i + \kappa_0^{\text{abs}} v_k P^{ik} \right) - \frac{\rho\gamma}{c} \kappa_0^{\text{sca}} \left[F^i - \gamma^2 E v^i - v_k P^{ik} + \gamma^2 v^i \left(\frac{2\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{c^2} - \frac{v_j v_k}{c^2} P^{jk} \right) \right]. \quad (\text{E.45})$$





2. RRHD Moment Formalism

Comoving vs Inertial

❁ 0th moment

❁ 1st moment

$$I_0 = \left(\frac{\nu_0}{\nu}\right)^4 I = \left[\gamma \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{l}}{c}\right)\right]^4 I. \quad (\text{E.25})$$

Integrating equation (E.25) over a solid angle, we obtain the transformation rule of E :

$$E_0 = \gamma^2 \left(E - 2 \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{c^2} + \frac{v_i v_k}{c^2} P^{ik} \right). \quad (\text{E.26})$$

Multiplying equation (E.25) by l_0^i and integrating the resultant equation over a solid angle, we have the transformation rule of F^i :

$$F_0^i = \gamma \left\{ F^i + \left[\left(\gamma + \frac{\gamma - 1}{v^2/c^2} \right) \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{c^2} - \gamma E - \frac{\gamma - 1}{v^2/c^2} \frac{v_j v_k}{c^2} P^{jk} \right] v^i - v_k P^{ik} \right\}. \quad (\text{E.27})$$

Multiplying equation (E.25) by $l_0^i l_0^j$ and integrating the resultant equation over a solid angle, we have the transformation rule of P^{ij} :

$$\begin{aligned} P_0^{ij} = & P^{ij} + \frac{\gamma - 1}{v^2/c^2} \left(\frac{v^i v_k}{c^2} P^{jk} + \frac{v^j v_k}{c^2} P^{ik} \right) \\ & + \left(\frac{\gamma - 1}{v^2/c^2} \right)^2 \frac{v^i v^j v_k v_m}{c^2} P^{km} + \gamma^2 \frac{v^i v^j}{c^2} E \\ & - \gamma \left(\frac{v^i F^j}{c^2} + \frac{v^j F^i}{c^2} \right) - 2\gamma \frac{\gamma - 1}{v^2/c^2} \frac{v^i v^j}{c^2} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{c^2}. \end{aligned} \quad (\text{E.28})$$





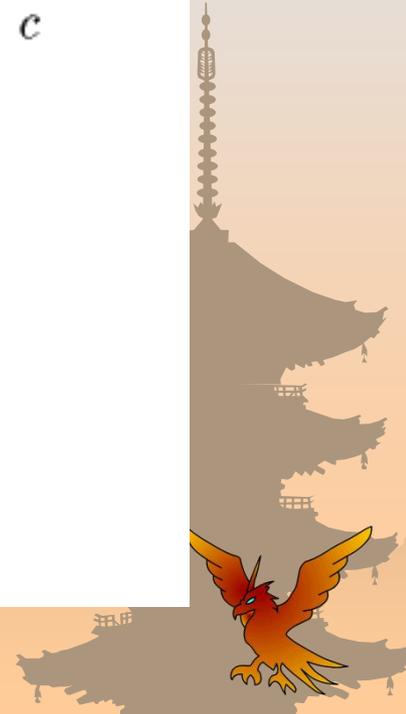
2. RRHD Moment Formalism

Moment equations for radiation

左辺は静止系、右辺は共動系の輻射量で表した0次と1次のモーメント式。1次のモーメント式の3行目は単純に共動系でガスに輻射が運動量を与える項になっている。

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \mathbf{F} = \rho \gamma (j_0 - c \kappa_0^{\text{abs}} E_0) - \rho \gamma (\kappa_0^{\text{abs}} + \kappa_0^{\text{sca}}) \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_0}{c}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial F^i}{\partial t} + \frac{\partial P^{ik}}{\partial x^k} &= \rho \gamma \frac{v^i}{c^2} (j_0 - c \kappa_0^{\text{abs}} E_0) \\ &\quad - \rho (\kappa_0^{\text{abs}} + \kappa_0^{\text{sca}}) \frac{\gamma - 1}{v^2} \frac{v^i}{c} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_0) \\ &\quad - \frac{1}{c} \rho (\kappa_0^{\text{abs}} + \kappa_0^{\text{sca}}) F_0^i. \end{aligned}$$





2. RRHD Moment Formalism

Moment equations for radiation

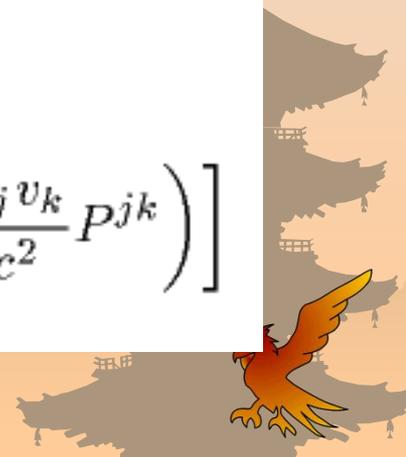
両辺とも静止系の放射量で表した0次と1次のモーメント式。1次のモーメント式の2行目で、[]内の第2項と第3項などで現れている速度に比例する項が、いわゆる放射抵抗(コンプトン抵抗)。

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \mathbf{F} = \rho \gamma \left(j_0 - c \kappa_0^{\text{abs}} E + \kappa_0^{\text{abs}} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{c} \right)$$

$$+ \rho \gamma^3 \kappa_0^{\text{sca}} \left[\frac{v^2}{c} E + \frac{v_i v_j}{c} P^{ij} - \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{c} \right]$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial F^i}{\partial t} + \frac{\partial P^{ik}}{\partial x^k} = \frac{\rho \gamma}{c} \left(\frac{v^i}{c} j_0 - \kappa_0^{\text{abs}} F^i + \kappa_0^{\text{abs}} v_k P^{ik} \right)$$

$$- \frac{\rho \gamma}{c} \kappa_0^{\text{sca}} \left[F^i - \gamma^2 E v^i - v_k P^{ik} + \gamma^2 v^i \left(\frac{2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{c^2} - \frac{v_j v_k}{c^2} P^{jk} \right) \right]$$





2. RRHD Closure Relation 1

Usual closure relation
for radiation

In the comoving frame

Eddington approximation

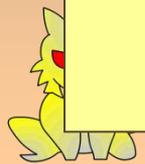
$$P_{\text{co}}^{ik} = \frac{\delta^{ik}}{3} E_{\text{co}}$$

Diffusion approximation

$$F_{\text{co}}^i = -\frac{c}{\kappa_R \rho} \frac{\partial P_{\text{co}}^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{c}{3\kappa_R \rho} \frac{\partial E_{\text{co}}}{\partial x^i}$$

Flux-limited diffusion

$$F_{\text{co}}^i = -\lambda \frac{c}{\kappa_R \rho} \frac{\partial E_{\text{co}}}{\partial x^i}$$





2. RRHD Closure Relation 1

Usual closure relation for radiation

In the comoving frame
Eddington approximation

$$P_{co}^{ik} = \frac{\delta^{ik}}{3} E_{co}$$

Diffusion approximation

$$F_{co}^i = -\frac{c}{\kappa_R \rho} \frac{\partial P_{co}^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{c}{3\kappa_R \rho} \frac{\partial E_{co}}{\partial x^i}$$

Flux-limited diffusion

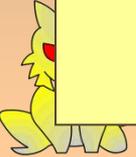
$$F_{co}^i = -\lambda \frac{c}{\kappa_R \rho} \frac{\partial E_{co}}{\partial x^i}$$

• エディントン因子

Isotropic assumption may break down in the relativistic regime even in the comoving frame.

• シミュレーション

Diffusion assumption may break down in the optically thin and/or relativistic regimes even in the comoving frame.





2. RRHD Pathological Behavior

Violation of Eddington Approximation in the Relativistic Moment Formalism

Turolla and Nobili 1988

Turolla et al. 1995

Dullemond 1999

Fukue 2005

E.2.3 Closure Relation

As a closure relation, we usually adopt the Eddington approximation *in the comoving frame*:

$$P_0^{ij} = \frac{\delta^{ij}}{3} E_0. \quad (\text{E.46})$$

It should be noted that we here do not consider the radiative viscosity.

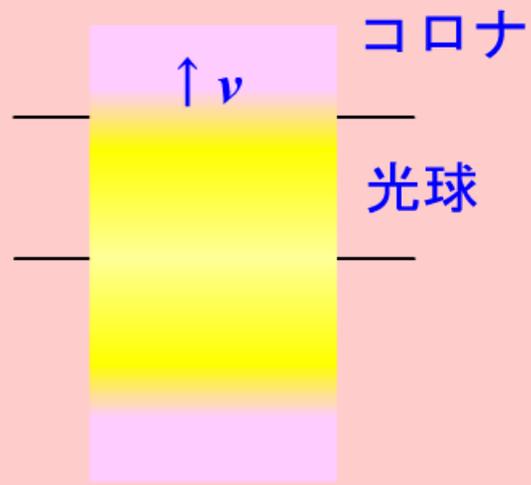
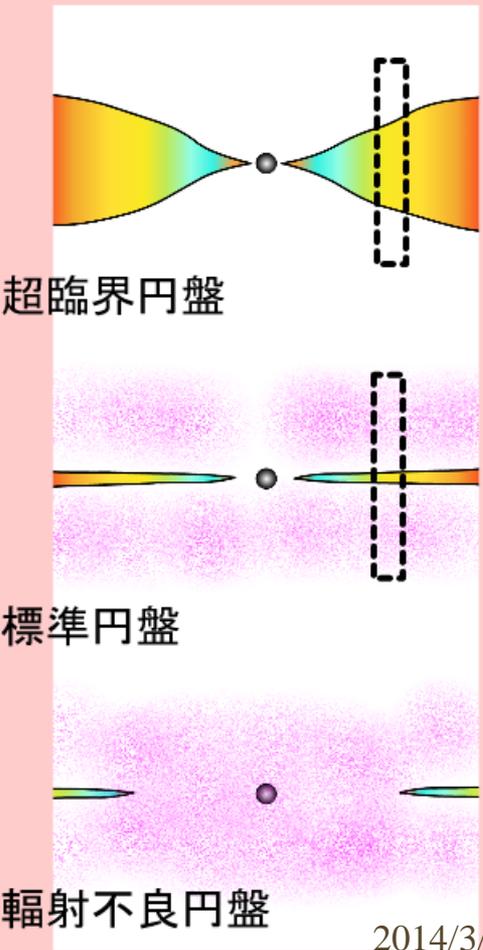
Substituting the transformation rules (E.26)–(E.28) into this relation (E.46), we have the closure relation in the inertial frame:

$$\begin{aligned} P^{ij} - \frac{\delta^{ij}}{3} \gamma^2 \frac{v_k v_m}{c^2} P^{km} + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \left(\frac{v^i v_k}{c^2} P^{jk} + \frac{v^j v_k}{c^2} P^{ik} \right) \\ + \left(\frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \right)^2 \frac{v^i v^j}{c^2} \frac{v_k v_m}{c^2} P^{km} = \frac{\delta^{ij}}{3} \gamma^2 \left(E - 2 \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{c^2} \right) - \gamma^2 \frac{v^i v^j}{c^2} E \\ + \gamma \left(\frac{v^i F^j}{c^2} + \frac{v^j F^i}{c^2} \right) + 2\gamma \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \frac{v^i v^j}{c^2} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{c^2}. \end{aligned} \quad (\text{E.47})$$



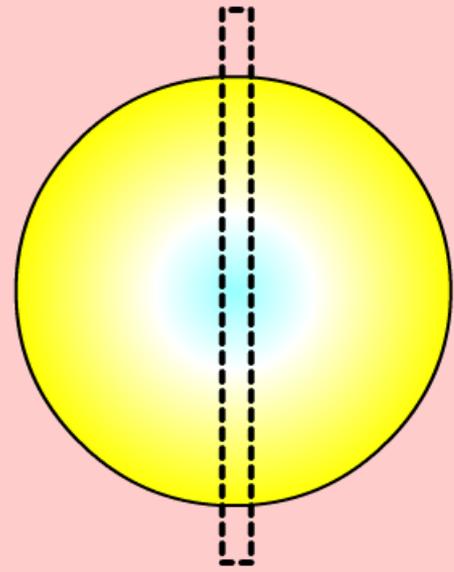


2. Motivation 従来の定式化の下で相対論的輻射流を調べた (Fukue 2005)



円盤内 (輻射球内) の輻射圧駆動プラズマ流を鉛直方向 (半径方向) に輻射輸送を考慮して解く。

表面が動いているとして正しい境界条件を用いる。



ガンマ線バースト



2. RRHD

$v = c/\sqrt{3}$ で特異性が出現

$$cJ \frac{du}{d\tau} = -\frac{\gamma}{c} \frac{F(1 + 4u^2) - 4cP\gamma u}{1 - 2u^2},$$

or

$$c^2 J \gamma^2 \frac{d\beta}{d\tau} = -\frac{F(1 + 3\beta^2) - 4cP\beta}{\underline{1 - 3\beta^2}},$$

$$u^2 = 1/2$$

or

$$\beta^2 = 1/3$$

で分母=0!

平行平板(1次元定常輻射流)で、 τ は表面からの光学的厚み

$u = \gamma\beta = \gamma v/c$: 流れの4元速度、 $\beta = v/c$

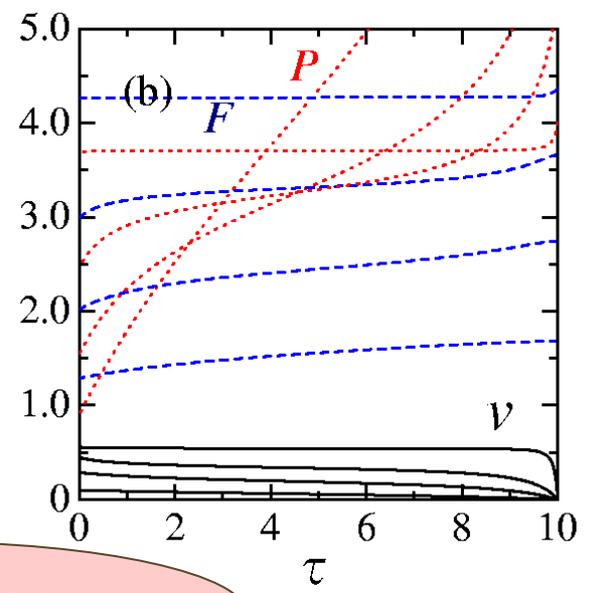
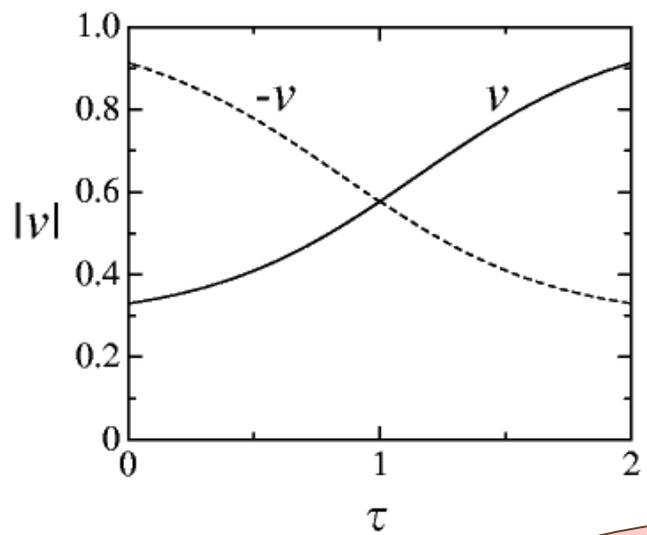
F : 輻射流束、 P : 輻射ストレス、 J : 質量流束





2. Motivation 従来の定式化の下では

- 特異性を通過する遷音速解はあるが、輻射抵抗で減速する解で境界条件も満たさず、**不適**
- 加速する解で、かつ表面境界条件を満たすのは、特異性を通過しない**亜音速解**だけだった



光速まで加速できない！



2. RRHD 問題はclosure relationの妥当性

特異性の原因を辿ると
エディントン近似に行き着く。

$$P_0^{ij} = \frac{\delta^{ij}}{3} E_0,$$

従来の定式化では、

P_0 : 流体共動系での輻射ストレス(テンソル)

E_0 : 流体共動系での輻射エネルギー密度

$$P_0 = f E_0 : f = 1/3$$

と置くが、これは $v \sim c$ ($\beta \sim 1$) で成り立つのか？

大きな速度勾配によって等方性近似が悪くなる





エディントン近似

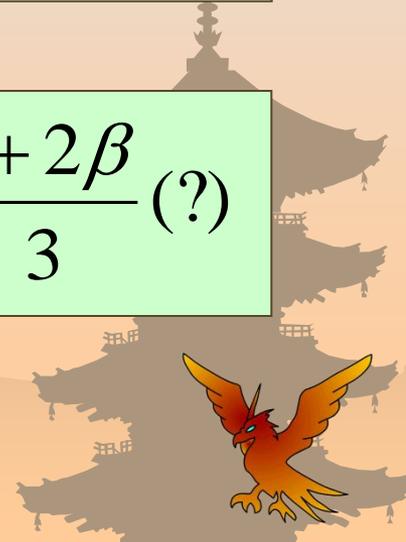
- 拡散近似 ▼ 輻射場が等方かつ光学的に厚い
- エディントン近似 ▼ 輻射場が等方であればいい
- エディントン近似は拡散近似よりは適用範囲が広いが、輻射場が非等方になると問題が生じる
- 非相対論的静止大気 → 光学的に厚いから薄い非等方

$$P^{ij} = \frac{\delta^{ij}}{3} E \quad \Rightarrow \quad P = f(\tau)E, \quad f(\tau) = \frac{1 + \tau}{1 + 3\tau}$$

- 相対論的加速流 → 共動系で観ても非等方

$$P_0 = \frac{\delta^{ij}}{3} E_0 \quad \Rightarrow \quad P_0 = f(\beta)E_0, \quad f(\beta) = \frac{1 + 2\beta}{3} (?)$$

• 方策

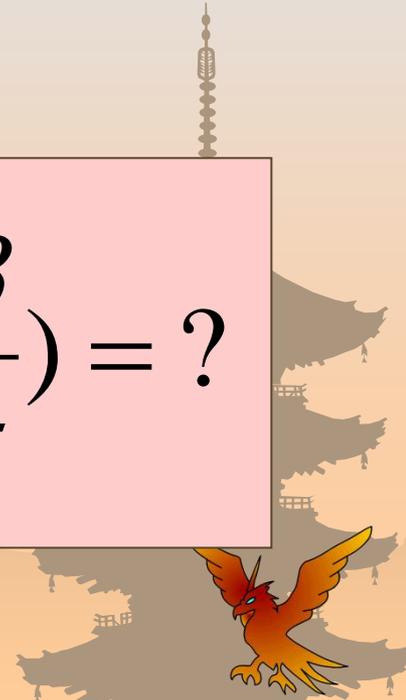




エディントン近似

- ❁ 相対論的加速流: 共動系で観ても非等方
- ❁ 速度だけではなく、**速度勾配にも依存**
- ❁ むしろ速度勾配の方が重要?

$$P_0 = f\left(\beta, \frac{d\beta}{d\tau}\right) E_0, \quad f\left(\beta, \frac{d\beta}{d\tau}\right) = ?$$





1. Motivation 変動エディントン因子

光学的に厚いー薄いを遷移する輻射流 (球対称)

Tamazawa et al. 1975

τ 大: diffusion limit $\rightarrow f \sim 1/3$
(光子の平均自由行程が短く、光子拡散が等方)

τ 小: streaming limit $\rightarrow f \sim 1$
(光子の平均自由行程が長くなり、光子拡散が非等方になる)

低速 (静止)ー亜光速へ加速される輻射流

Fukue 2006

β 小: diffusion limit $\rightarrow f \sim 1/3$
(光子の平均自由行程が短く、光子拡散が等方)

β 大: relativistic limit $\rightarrow f \sim 1$
(加速が光速のオーダーになり、平均自由行程が伸びて、光子拡散が非等方になる)

$$f(\tau) = \frac{1 + \tau}{1 + 3\tau}$$

2014/3/3

例えば

Moment Formalism

$$f(\beta) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\beta.$$

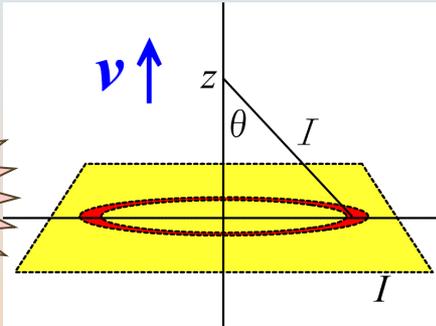




2. RRHD Eddington Factor

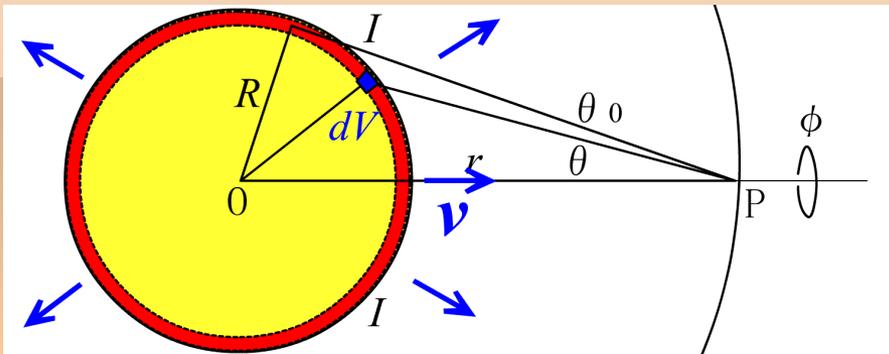
Eddington factor in an optically thin regime

plane-parallel



Moving

spherical



plane - parallel **Inertial frame**

$$cE = 2\pi I$$

$$F = \pi I$$

$$cP = \frac{2}{3} \pi I$$

E, F, P

\Rightarrow

Comoving frame

spherical

$E_\theta, F_\theta, P_\theta$

$$cE = 2\pi I(1 - \cos \theta_0)$$

$$F^r = \pi I \sin^2 \theta_0$$

$$cP^{rr} = \frac{2}{3} \pi I(1 - \cos^3 \theta_0)$$

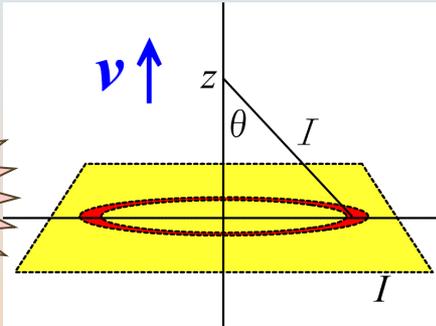




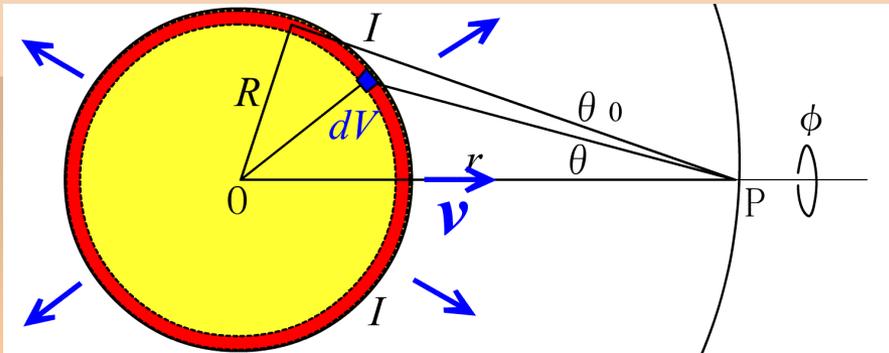
2. RRHD Eddington Factor

Eddington factor in an optically thin regime

plane-parallel

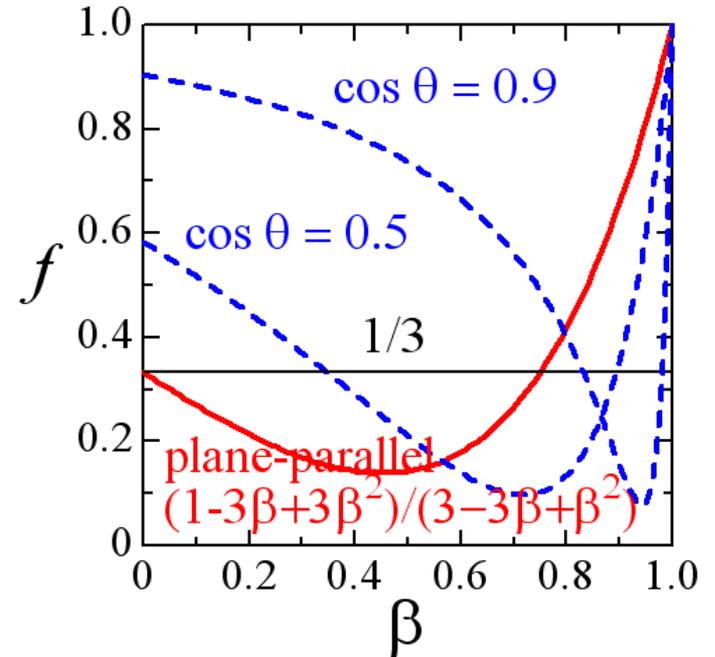


spherical



plane - parallel

$$f = \frac{P_0}{E_0}$$



spherical

$$f = \frac{P_0}{E_0}$$





2. RRHD Closure Relation 2

What is a closure relation
in subrelativistic to relativistic regimes

*** Velocity - dependent**

variable Eddington factor

$$P_{co} = f(\beta)E_{co}$$

Fukue 2006;
Fukue, Akizuki
2006, 2007

• plane - parallel

$$f(\beta) = \frac{1+2\beta}{3}; \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Akizuki, Fukue
2007;

• spherical

$$f(\tau, \beta) = \frac{1 + \tau / [\gamma(1 + \beta)]}{1 + 3\tau / [\gamma(1 + \beta)]}$$

Abramowicz+
1991

*** Numerical simulation**

$$f(\tau, \beta)$$

Koizumi,
Umemura 2007

*** Velocity - gradient - dependent**

variable Eddington factor

$$f(\tau, \beta, d\beta/d\tau)$$

Fukue 2007





2. RRHD Closure Relation 2

What is a closure relation
in subrelativistic to relativistic regimes

*** Velocity - dependent**

variable Eddington factor

$$P_{co} = f(\beta)E_{co}$$

- plane - parallel

$$f(\beta) = \frac{1+2\beta}{3}; \quad \beta = \frac{v}{c} \quad \text{Fukue 2006}$$

- spherical

$$f(\tau, \beta) = \frac{1+\tau / [\gamma(1+\beta)]}{1+3\tau / [\gamma(1+\beta)]} \quad \text{Akizuki, Fukue 2007}$$

*** Numerical simulation**

$$f(\tau, \beta) \quad \text{Koizumi, Umemura 2007}$$

*** Velocity - gradient - dependent**

variable Eddington factor **Fukue 2007**

$$f(\tau, \beta, d\beta/d\tau) \quad \text{2014/3/3}$$

Tamazawa+
1975

$$f = (1+\tau) / (1+3\tau)$$

$$\tau \rightarrow \tau / [\gamma(1+\beta)]$$

Abramowicz+
1991





2. RRHD Closure Relations

What is a closure relation in subrelativistic to relativistic limit?

* Velocity - dependent

variable Eddington factor

$$P_{co} = f(\beta)E_{co}$$

• plane - parallel

$$f(\beta) = \frac{1+2\beta}{3}; \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Fukue 2006;
Fukue, Akizuki
2006, 2007

• spherical

$$f(\tau, \beta) = \frac{1+\tau/[\gamma(1+\beta)]}{1+3\tau/[\gamma(1+\beta)]}$$

Akizuki, Fukue
2007;
Abramowicz+
1991

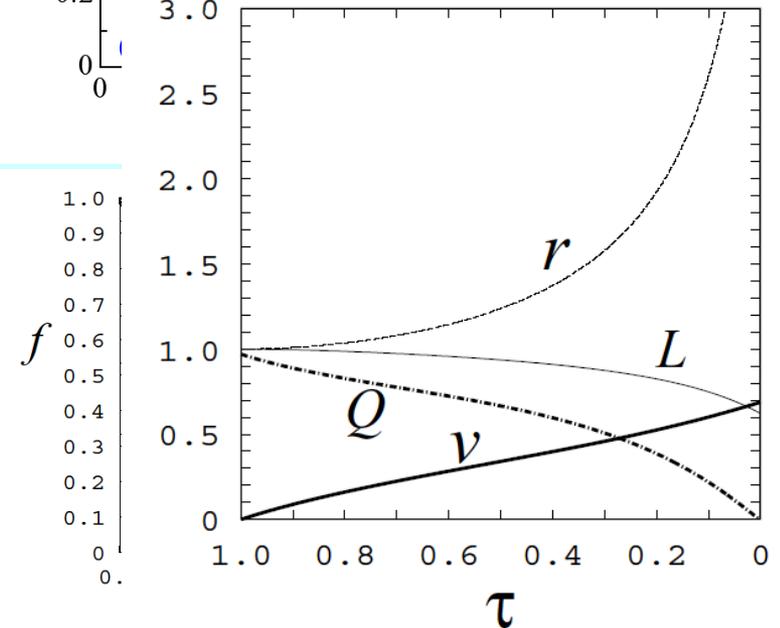
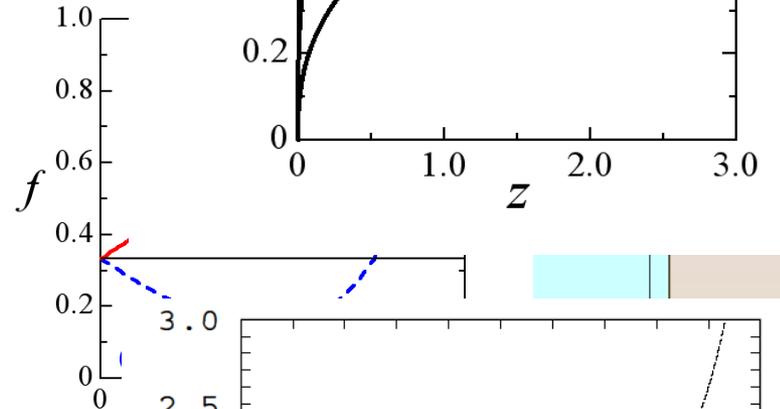
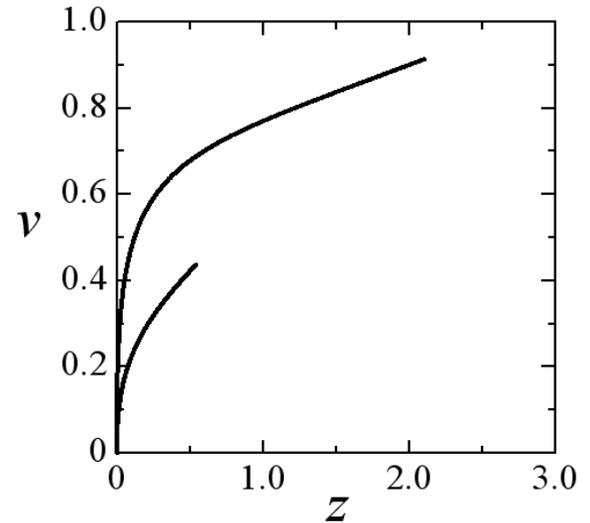
* Numerical simulation

$$f(\tau, \beta)$$

* Velocity - gradient - dependent

variable Eddington factor

$$f(\tau, \beta, \frac{d\beta}{d\tau})$$





2. RRHD Closure Relation 2

What is a closure relation
in subrelativistic to relativistic regimes

* Velocity - dependent

variable Eddington factor

$$P_{co} = f(\beta)E_{co}$$

• plane - parallel

$$f(\beta) = \frac{1+2\beta}{3}; \quad \beta = \frac{v}{c}$$

• spherical

$$f(\tau, \beta) = \frac{1 + \tau / [\gamma(1 + \beta)]}{1 + 3\tau / [\gamma(1 + \beta)]}$$

* Numerical simulation

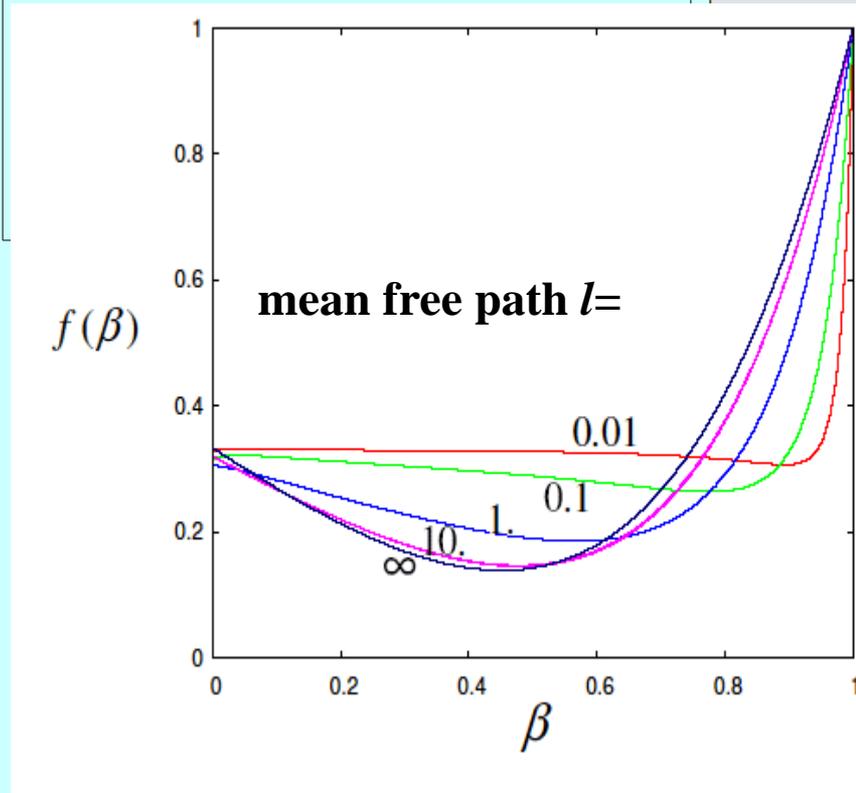
$$f(\tau, \beta)$$

Koizumi,
Umemura 2007

* Velocity - gradient - dependent

variable Eddington factor

$$f(\tau, \beta, d\beta/d\tau)$$





2. RRHD Closure Relation 2

What is a closure relation
in subrelativistic to relativistic regimes

* Velocity - dependent

variable Eddington factor

$$P_{co} = f(\beta)E_{co}$$

• plane - parallel

$$f(\beta) = \frac{1+2\beta}{3}; \quad \beta = \frac{v}{c}$$

• spherical

$$f(\tau, \beta) = \frac{1 + \tau / [\gamma(1 + \beta)]}{1 + 3\tau / [\gamma(1 + \beta)]}$$

* Numerical simulation

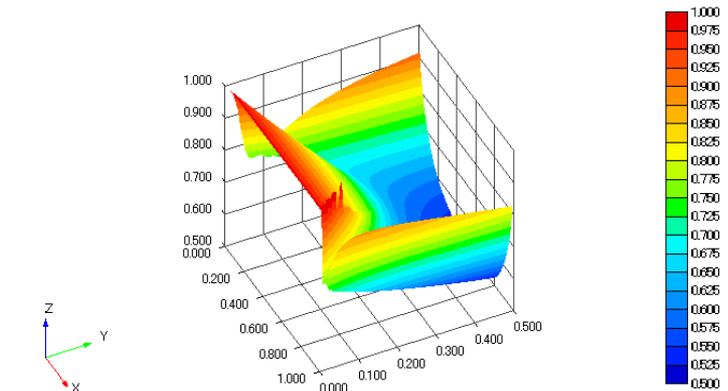
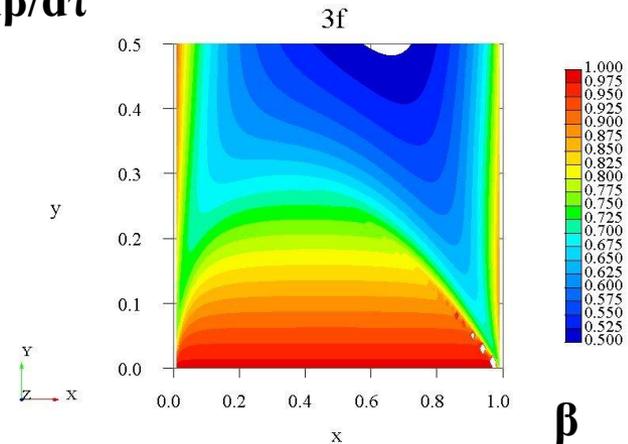
$$f(\tau, \beta)$$

* Velocity - gradient - dependent

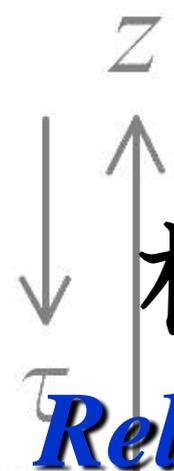
variable Eddington factor **Fukue 2007**

$$f(\tau, \beta, d\beta/d\tau)$$

$d\beta/d\tau$



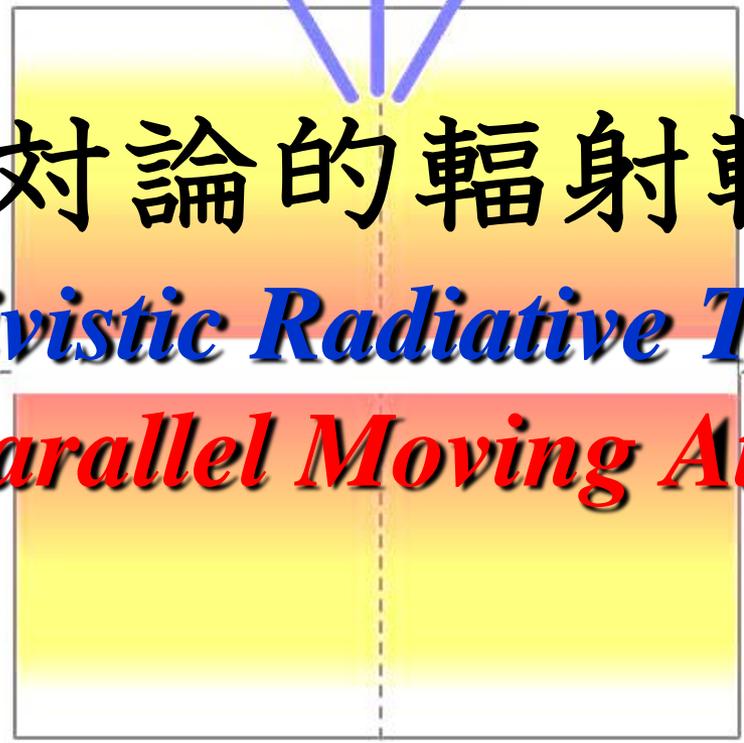




相对論的輻射輸送

Relativistic Radiative Transfer

Plane-Parallel Moving Atmosphere



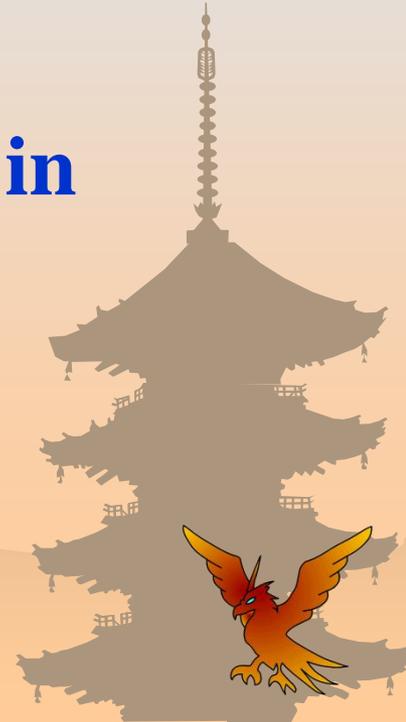
福江 純 @ 大阪教育大学





2 相对論的輻射輸送 (速度一定)の解析解

Relativistic Radiative Transfer in Relativistic Flows





相対論的流れでの輻射輸送

3 有限の厚みをもつ平行平板流における相対論的輻射輸送の厳密解 一般化されたMilne-Eddington解 (速度一定)

Radiative Transfer in Relativistic Flows

**3 Milne-Eddington Solutions for
Relativistic Plane-Parallel Flows**

by

Fukue J. 2008, PASJ 60, 627





2. 相对論的輻射輸送方程式 一般形



inertial/fixed frame

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + (\mathbf{l} \cdot \nabla) I = \rho \gamma^{-3} \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{l}}{c} \right)^{-3} & \left[\frac{j_0}{4\pi} - (\kappa_0^{\text{abs}} + \kappa_0^{\text{sca}}) \gamma^4 \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{l}}{c} \right)^4 I \right. \\ & + \frac{\kappa_0^{\text{sca}}}{4\pi} \frac{3}{4} \gamma^{-2} \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{l}}{c} \right)^{-2} \left\{ \gamma^4 \left[\left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{l}}{c} \right)^2 + \left(\frac{v^2}{c^2} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{l}}{c} \right)^2 \right] cE \right. \\ & + 2\gamma^2 \left(\frac{v^2}{c^2} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{l}}{c} \right) \mathbf{F} \cdot \mathbf{l} - 2\gamma^4 \left[\left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{l}}{c} \right)^2 + \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{l}}{c} \right) \left(\frac{v^2}{c^2} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{l}}{c} \right) \right] \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{c} \\ & \left. \left. + l_i l_j c P^{ij} - 2\gamma^2 \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{l}}{c} \right) v_i l_j P^{ij} + 2\gamma^4 \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{l}}{c} \right)^2 \frac{v_i v_j P^{ij}}{c} \right\} \right], \end{aligned}$$

$$cE = \int I d\Omega, \quad F^i = \int I l^i d\Omega, \quad cP^{ik} = \int I l^i l^k d\Omega$$





2. 相对論的輻射輸送方程式 鉛直方向

inertial/fixed frame

静止系での輻射強度 $I(z)$

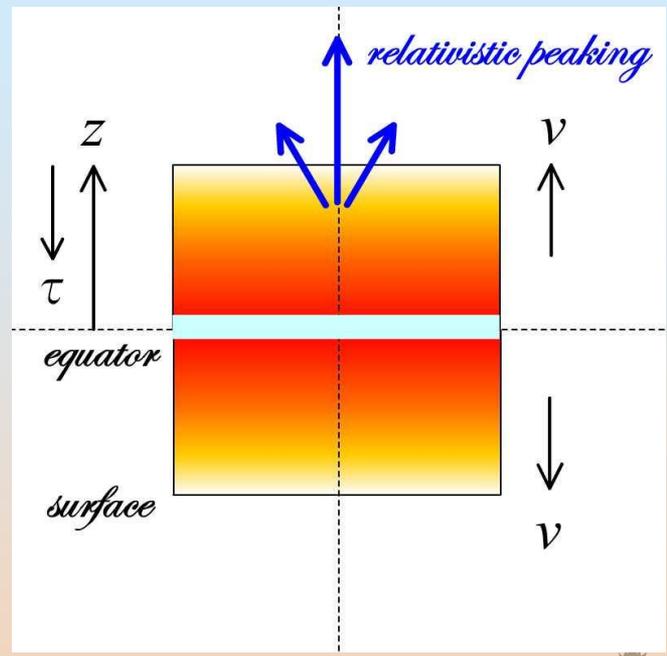
鉛直座標 z

方向余弦 $\mu = \cos \theta$

速度 $\beta = v/c$; 4元速度 u

密度 ρ

光学的厚み $\tau = -\kappa \rho dz$



輻射輸送方程式

$$\mu \frac{dI}{dz} = \rho \frac{1}{\gamma^3 (1 - \beta\mu)^3} \left[\frac{j_0}{4\pi} - (\kappa_0^{\text{abs}} + \kappa_0^{\text{sca}}) \gamma^4 (1 - \beta\mu)^4 I + \frac{\kappa_0^{\text{sca}}}{4\pi} \frac{3}{4} \gamma^2 \left\{ \left[1 + \frac{(\mu - \beta)^2}{(1 - \beta\mu)^2} \beta^2 + \frac{(1 - \beta^2)^2}{(1 - \beta\mu)^2} \frac{1 - \mu^2}{2} \right] cE - \left[1 + \frac{(\mu - \beta)^2}{(1 - \beta\mu)^2} \right] 2F\beta + \left[\beta^2 + \frac{(\mu - \beta)^2}{(1 - \beta\mu)^2} - \frac{(1 - \beta^2)^2}{(1 - \beta\mu)^2} \frac{1 - \mu^2}{2} \right] cP \right\} \right],$$





2. 相对論的輻射輸送方程式 鉛直方向



流体方程式

$$\rho c u = \rho \gamma \beta c = J \quad (= \text{const.}),$$

$$c^2 u \frac{du}{dz} = c^2 \gamma^4 \beta \frac{d\beta}{dz} = -\frac{d\psi}{dz} - \gamma^2 \frac{c^2}{\varepsilon + p} \frac{dp}{dz} + \frac{\rho c^2}{\varepsilon + p} \frac{\kappa_0^{\text{abs}} + \kappa_0^{\text{sca}}}{c} \gamma^3 \left[F(1 + \beta^2) - (cE + cP)\beta \right],$$

$$0 = \frac{q^+}{\rho} - \left(j_0 - \kappa_0^{\text{abs}} cE \gamma^2 - \kappa_0^{\text{abs}} cP u^2 + 2\kappa_0^{\text{abs}} F \gamma u \right),$$

モーメント方程式

$$\frac{dF}{dz} = \rho \gamma \left[j_0 - \kappa_0^{\text{abs}} cE + \kappa_0^{\text{sca}} (cE + cP) \gamma^2 \beta^2 + \kappa_0^{\text{abs}} F \beta - \kappa_0^{\text{sca}} F (1 + \beta^2) \gamma^2 \beta \right],$$

$$\frac{dP}{dz} = \frac{\rho \gamma}{c} \left[j_0 \beta - \kappa_0^{\text{abs}} F + \kappa_0^{\text{abs}} cP \beta - \kappa_0^{\text{sca}} F \gamma^2 (1 + \beta^2) + \kappa_0^{\text{sca}} (cE + cP) \gamma^2 \beta \right],$$

$$cP(1 - f\beta^2) = cE(f - \beta^2) + 2F\beta(1 - f),$$

$$cE = \int I d\Omega, \quad F^i = \int I l^i d\Omega, \quad cP^{ik} = \int I l^i l^k d\Omega$$





2. 相对論的輻射輸送方程式 鉛直方向

輻射輸送方程式

$$\mu \frac{dI}{dz} = \rho \frac{1}{\gamma^3 (1 - \beta\mu)^3} \left[-(\kappa_0^{\text{abs}} + \kappa_0^{\text{sca}}) \gamma^4 (1 - \beta\mu)^4 I + \frac{q^+}{4\pi\rho} + \frac{\kappa_0^{\text{abs}}}{4\pi} \gamma^2 (cE - 2F\beta + \beta^2 cP) \right. \\ \left. + \frac{\kappa_0^{\text{sca}}}{4\pi} \frac{3}{4} \gamma^2 \left\{ \left[1 + \frac{(\mu - \beta)^2}{(1 - \beta\mu)^2} \beta^2 + \frac{(1 - \beta^2)^2}{(1 - \beta\mu)^2} \frac{1 - \mu^2}{2} \right] cE \right. \right. \\ \left. \left. - \left[1 + \frac{(\mu - \beta)^2}{(1 - \beta\mu)^2} \right] 2F\beta + \left[\beta^2 + \frac{(\mu - \beta)^2}{(1 - \beta\mu)^2} - \frac{(1 - \beta^2)^2}{(1 - \beta\mu)^2} \frac{1 - \mu^2}{2} \right] cP \right\} \right]. \quad (9)$$

Introducing the optical depth defined by

$$d\tau = -(\kappa_0^{\text{abs}} + \kappa_0^{\text{sca}}) \rho dz, \quad (10)$$

the transfer equation (9) finally becomes

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = \frac{1}{\gamma^3 (1 - \beta\mu)^3} \left[\gamma^4 (1 - \beta\mu)^4 I - \frac{1}{4\pi} \frac{\kappa_0^{\text{abs}}}{\kappa_0^{\text{abs}} + \kappa_0^{\text{sca}}} \gamma^2 (cE - 2F\beta + \beta^2 cP) \right. \\ \left. - \frac{1}{4\pi} \frac{\kappa_0^{\text{sca}}}{\kappa_0^{\text{abs}} + \kappa_0^{\text{sca}}} \frac{3}{4} \gamma^2 \left\{ \left[1 + \frac{(\mu - \beta)^2}{(1 - \beta\mu)^2} \beta^2 + \frac{(1 - \beta^2)^2}{(1 - \beta\mu)^2} \frac{1 - \mu^2}{2} \right] cE \right. \right. \\ \left. \left. - \left[1 + \frac{(\mu - \beta)^2}{(1 - \beta\mu)^2} \right] 2F\beta + \left[\beta^2 + \frac{(\mu - \beta)^2}{(1 - \beta\mu)^2} - \frac{(1 - \beta^2)^2}{(1 - \beta\mu)^2} \frac{1 - \mu^2}{2} \right] cP \right\} \right] \\ = \gamma (1 - \beta\mu) I - \frac{1 - A}{4\pi} \frac{1}{\gamma (1 - \beta\mu)^3} (cE - 2F\beta + \beta^2 cP) \\ - \frac{A}{4\pi} \frac{3}{4} \frac{1}{\gamma (1 - \beta\mu)^3} \left\{ \left[1 + \frac{(\mu - \beta)^2}{(1 - \beta\mu)^2} \beta^2 + \frac{(1 - \beta^2)^2}{(1 - \beta\mu)^2} \frac{1 - \mu^2}{2} \right] cE \right. \\ \left. - \left[1 + \frac{(\mu - \beta)^2}{(1 - \beta\mu)^2} \right] 2F\beta + \left[\beta^2 + \frac{(\mu - \beta)^2}{(1 - \beta\mu)^2} - \frac{(1 - \beta^2)^2}{(1 - \beta\mu)^2} \frac{1 - \mu^2}{2} \right] cP \right\}, \quad (11)$$

where

$$A \equiv \frac{\kappa_0^{\text{sca}}}{\kappa_0^{\text{abs}} + \kappa_0^{\text{sca}}} \quad (12)$$

$$\frac{dF}{d\tau} = \gamma^3 \beta [F(1 + \beta^2) - (cE + cP)\beta] = \gamma \beta \frac{F(f + \beta^2) - cP(1 + f)\beta}{f - \beta^2}, \quad (13)$$

$$c \frac{dP}{d\tau} = \gamma^3 [F(1 + \beta^2) - (cE + cP)\beta] = \gamma \frac{F(f + \beta^2) - cP(1 + f)\beta}{f - \beta^2}. \quad (14)$$

モーメント方程式





3. 解析解 仮定と状況

❁ 速度(のみ)一定と仮定する

- 以前: EFP 、源泉関数も一定
- 今回: EFP 、源泉関数は変数
 - 光学的厚みは有限
 - 赤道面の一様光源 ($I=I_0$ at $\tau=\tau_0$)

❁ モーメント方程式の解析解(EFP)を求め、それを用いて、輻射輸送方程式の解析解(I)を求める。





3. 解析解 モーメント量

❁ 一般解

3.1. General Solutions

If equation (13) is divided by equation (14), we have

$$\frac{dF}{cdP} = \beta,$$

which is integrated to give

$$F = \beta cP + F_1(\beta),$$

where $F_1(\beta)$ is an arbitrary function of β .

Inserting this relation (16) into equations (13) and (14), we can easily integrate equations (13) and (14) into the following forms:

$$F = \gamma^2(1+f)F_1(\beta) - C_F(\beta)e^{-\frac{\beta}{\gamma(f-\beta^2)}\tau},$$
$$cP = \frac{\gamma^2(f+\beta^2)}{\beta}F_1(\beta) - C_P(\beta)e^{-\frac{\beta}{\gamma(f-\beta^2)}\tau},$$

where $C_F(\beta)$ and $C_P(\beta)$ are arbitrary functions of β .



3. 解析解 モーメント量

❁ 一般解

$$cE = \frac{\gamma^2 F_1}{\beta} \left[(1 + f\beta^2) - (1 - 2\beta + f\beta^2)C_1(\beta)e^{-\frac{\beta}{\gamma(f - \beta^2)}\tau} \right]$$

$$F = \gamma^2 F_1 \left[(1 + f) - (f - \beta^2)C_1(\beta)e^{-\frac{\beta}{\gamma(f - \beta^2)}\tau} \right]$$

$$cP = \frac{\gamma^2 F_1}{\beta} \left[(f + \beta^2) - (f - \beta^2)C_1(\beta)e^{-\frac{\beta}{\gamma(f - \beta^2)}\tau} \right]$$





3. 解析解 モーメント量

特殊解

$$\frac{cE}{\pi I_s} = \frac{\gamma^2}{\beta} \left[(1 + f\beta^2)(1 + 2\beta) - (1 - 2\beta + f\beta^2)e^{-\frac{\beta}{\gamma(f - \beta^2)}\tau} \right]$$

$$\frac{F}{\pi I_s} = \gamma^2 \left[(1 + f)(1 + 2\beta) - (f - \beta^2)e^{-\frac{\beta}{\gamma(f - \beta^2)}\tau} \right]$$

$$\frac{cP}{\pi I_s} = \frac{\gamma^2}{\beta} \left[(f + \beta^2)(1 + 2\beta) - (f - \beta^2)e^{-\frac{\beta}{\gamma(f - \beta^2)}\tau} \right]$$

境界条件

$$\frac{cE_{co}}{\pi I_s} = \frac{1}{\beta} \left[(1 + 2\beta) - e^{-\frac{\beta}{\gamma(f - \beta^2)}\tau} \right]$$

$$\frac{F_{co}}{\pi I_s} = e^{-\frac{\beta}{\gamma(f - \beta^2)}\tau}$$

$$\frac{cP_{co}}{\pi I_s} = \frac{f}{\beta} \left[(1 + 2\beta) - e^{-\frac{\beta}{\gamma(f - \beta^2)}\tau} \right]$$

$$cE_s = 2\pi I_s \gamma_s^2 \frac{3 + 3\beta_s + \beta_s^2}{3}$$

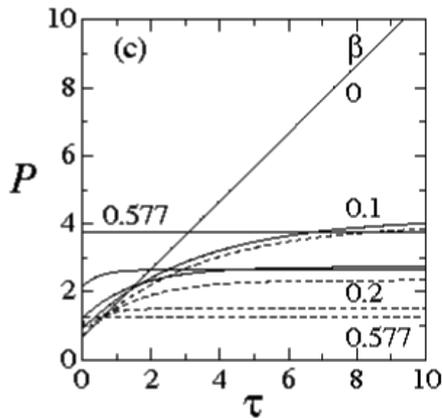
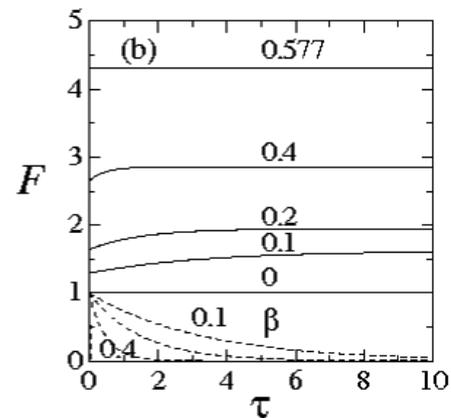
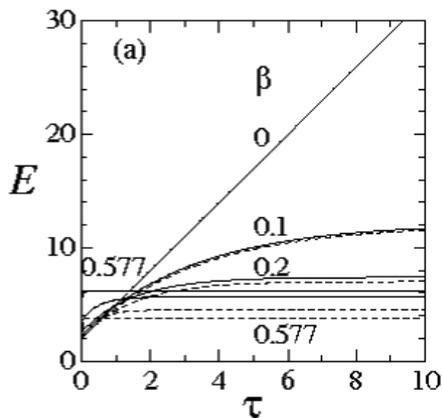
$$F_s = 2\pi I_s \gamma_s^2 \frac{3 + 8\beta_s + 3\beta_s^2}{6}$$

$$cP_s = 2\pi I_s \gamma_s^2 \frac{1 + 3\beta_s + 3\beta_s^2}{3}$$



3. 解析解 モーメント量

❁ 特殊解：エネルギー密度 E 、輻射流束 F 、輻射圧 P



$\beta = v/c$
 実線：静止系
 破線：共動系





3. 解析解 輻射強度

❁ 特殊解：輻射強度 I

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = \gamma(1 - \beta\mu)I - \frac{\pi I_s}{4\pi} \frac{1}{\gamma^3(1 - \beta\mu)^3} \frac{1}{\beta} \left[(1 + 2\beta) - e^{-\frac{\beta}{\gamma(f - \beta^2)}\tau} \right]$$

$$I(\tau, \mu, \beta) = \frac{\pi I_s}{4\pi} \frac{1}{\gamma^4(1 - \beta\mu)^4} \frac{1}{\beta} \left[(1 + 2\beta) - \frac{1}{1 + \frac{\beta\mu}{\gamma^2(1 - \beta\mu)(f - \beta^2)}} e^{-\frac{\beta}{\gamma(f - \beta^2)}\tau} \right]$$

$$- \frac{\pi I_s}{4\pi} \frac{1}{\gamma^4(1 - \beta\mu)^4} \frac{1}{\beta} \left[(1 + 2\beta) - \frac{1}{1 + \frac{\beta\mu}{\gamma^2(1 - \beta\mu)(f - \beta^2)}} e^{-\frac{\beta}{\gamma(f - \beta^2)}\tau_0} \right] e^{\frac{\gamma(1 - \beta\mu)}{\mu}(\tau - \tau_0)}$$

$$+ I(\tau_0, \mu) e^{\frac{\gamma(1 - \beta\mu)}{\mu}(\tau - \tau_0)}$$

$$\sim \frac{\pi I_s}{4\pi} \frac{1}{\gamma^4(1 - \beta\mu)^4} \frac{1}{\beta} \left[(1 + 2\beta) - \frac{1}{1 + \frac{\beta\mu}{\gamma^2(1 - \beta\mu)(f - \beta^2)}} e^{-\frac{\beta}{\gamma(f - \beta^2)}\tau} \right] \quad \text{for large } \tau_0$$

$$I(\tau, \mu, \beta) = \frac{\pi I_s}{4\pi} \frac{1}{\gamma^4(1 - \beta\mu)^4} \frac{1}{\beta} \left[(1 + 2\beta) - \frac{1}{1 + \frac{\beta\mu}{\gamma^2(1 - \beta\mu)(f - \beta^2)}} e^{-\frac{\beta}{\gamma(f - \beta^2)}\tau} \right]$$

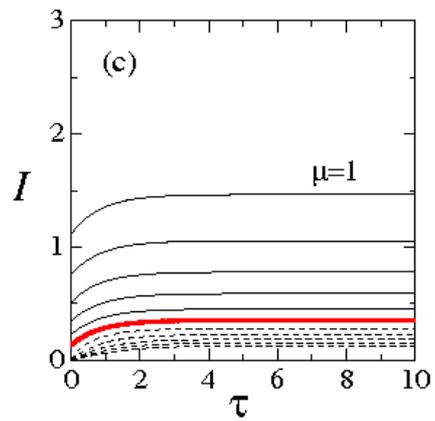
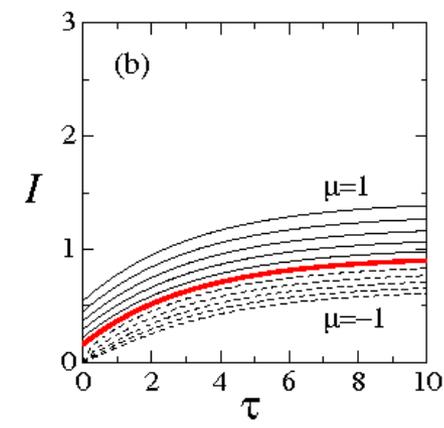
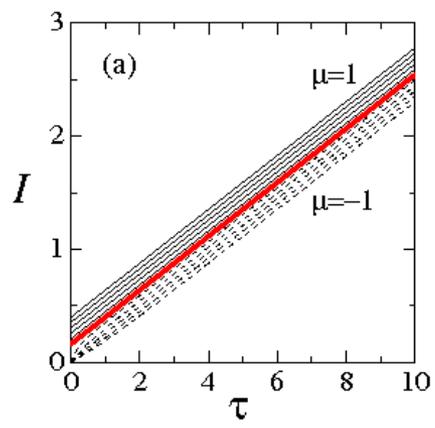
$$- \frac{\pi I_s}{4\pi} \frac{1}{\gamma^4(1 - \beta\mu)^4} \frac{1}{\beta} \left[(1 + 2\beta) - \frac{1}{1 + \frac{\beta\mu}{\gamma^2(1 - \beta\mu)(f - \beta^2)}} e^{-\frac{\beta}{\gamma(f - \beta^2)}\tau} \right]$$





3. 解析解 輻射強度

特殊解: 輻射強度 I



$\beta = v/c$
 実線: 上向き
 破線: 下向き





3. 解析解 輻射強度

速度が0の極限でMilne-Eddington解に漸近する

In the limit of small β , this solution reduces to the usual Milne-Eddington one; e.g., for $\mu > 0$

$$I(\tau, \mu, 0) \sim \frac{\pi I_s}{4\pi} \left[(2 + 3\tau + 3\mu) - (2 + 3\tau_0 + 3\mu) e^{-\frac{\tau - \tau_0}{\mu}} \right] + I(\tau_0, \mu) e^{-\frac{\tau - \tau_0}{\mu}}. \quad (41)$$

Finally, the emergent intensity $I(0, \mu, \beta)$ ($\mu > 0$) at the flow surface of $\tau = 0$ becomes

$$I(0, \mu, \beta) = \frac{\pi I_s}{4\pi} \frac{1}{\gamma^4 (1 - \beta\mu)^4} \frac{2 + \frac{(1 + 2\beta)\mu}{\gamma^2 (1 - \beta\mu)(f - \beta^2)}}{1 + \frac{\beta\mu}{\gamma^2 (1 - \beta\mu)(f - \beta^2)}} - \frac{\pi I_s}{4\pi} \frac{1}{\gamma^4 (1 - \beta\mu)^4} \frac{1}{\beta} \left[(1 + 2\beta) - \frac{1}{1 + \frac{\beta\mu}{\gamma^2 (1 - \beta\mu)(f - \beta^2)}} e^{-\frac{\beta}{\gamma(f - \beta^2)}\tau_0} \right] e^{-\frac{\gamma(1 - \beta\mu)}{\mu}\tau_0} + I(\tau_0, \mu) e^{-\frac{\gamma(1 - \beta\mu)}{\mu}\tau_0}$$

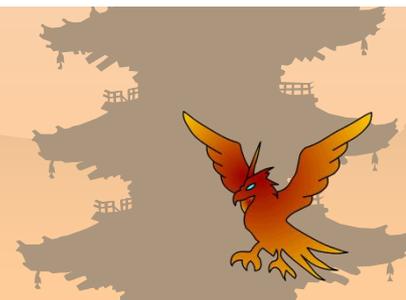




3. 解析解 輻射強度

❁ 表面での emergent intensity の解析解

$$\begin{aligned}
I(0, \mu, \beta) = & \frac{\pi I_s}{4\pi} \frac{1}{\gamma^4 (1 - \beta\mu)^4} \frac{2 + \frac{(1 + 2\beta)\mu}{\gamma^2 (1 - \beta\mu)(f - \beta^2)}}{1 + \frac{\beta\mu}{\gamma^2 (1 - \beta\mu)(f - \beta^2)}} \\
& - \frac{\pi I_s}{4\pi} \frac{1}{\gamma^4 (1 - \beta\mu)^4} \frac{1}{\beta} \left[(1 + 2\beta) - \frac{1}{1 + \frac{\beta\mu}{\gamma^2 (1 - \beta\mu)(f - \beta^2)}} e^{-\frac{\beta}{\gamma(f - \beta^2)}\tau_0} \right] e^{-\frac{\gamma(1 - \beta\mu)}{\mu}\tau_0} \\
& + I(\tau_0, \mu) e^{-\frac{\gamma(1 - \beta\mu)}{\mu}\tau_0}
\end{aligned}$$

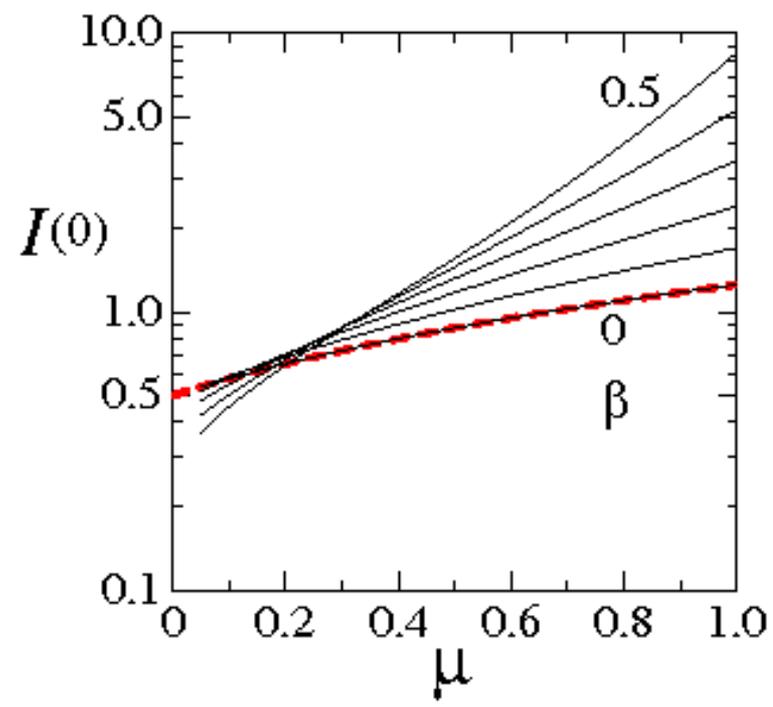




3. 解析解 輻射強度

- ❁ 表面での emergent intensity の解析解
- ❁ 強い相対論的ピーキングを示す

表面からの
放射強度

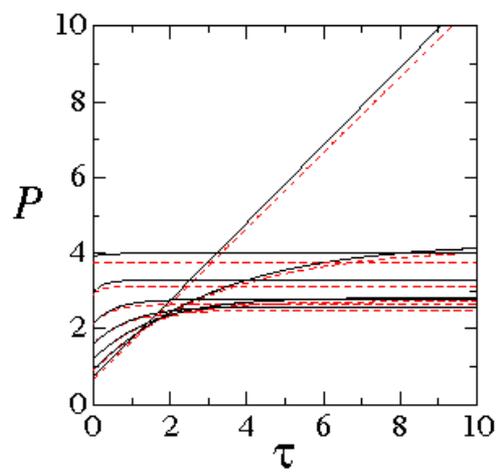
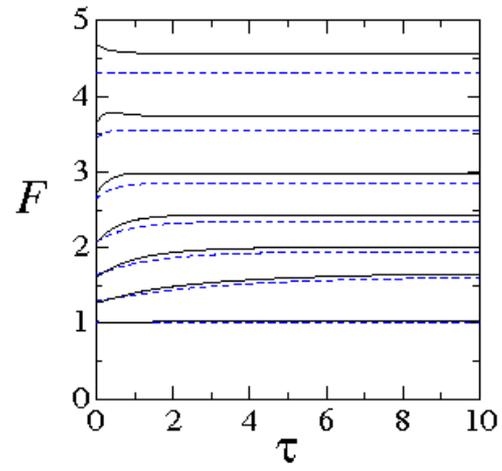
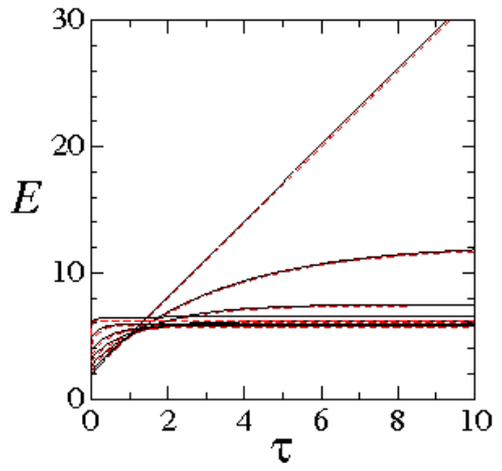


赤い破線
静的大気での
通常の
周縁減光効果

方向余弦



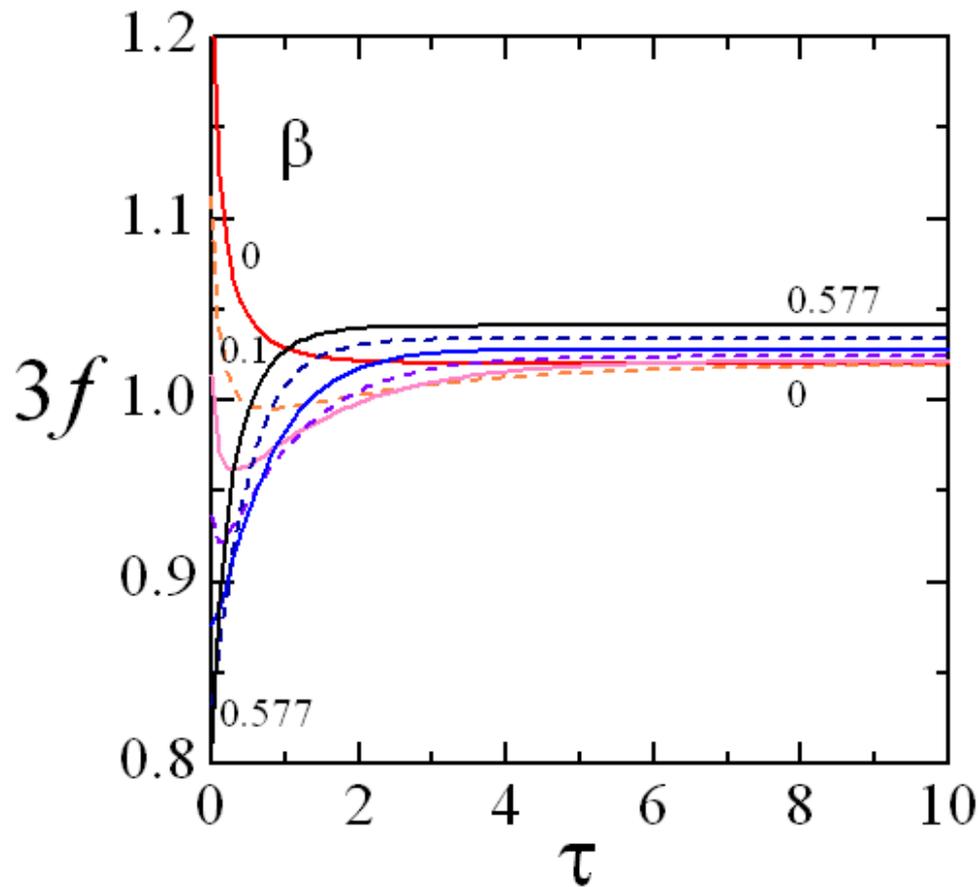
4. 議論 議論





4. 議論 エディントン因子

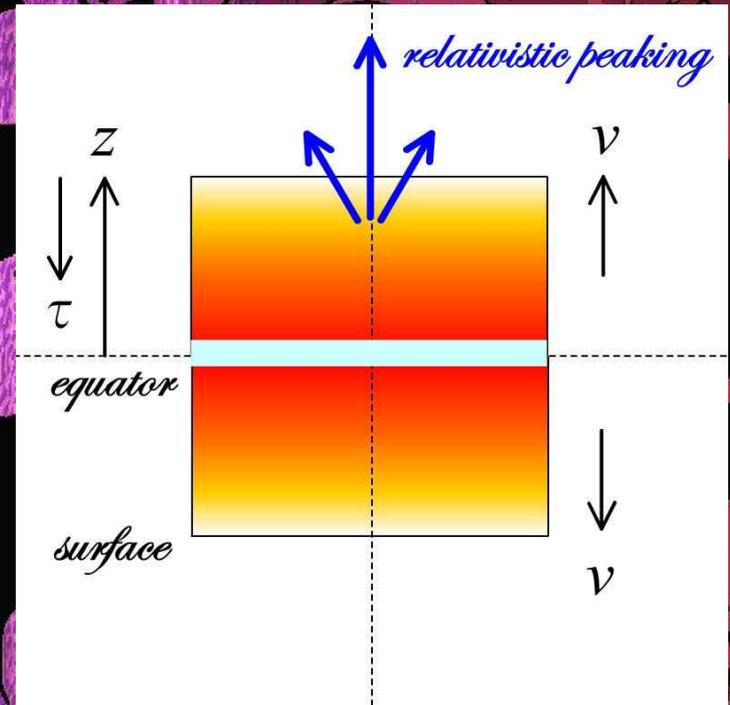
- ❁ 低速 $f(0) > 1/3$
- ❁ 高速 $f(0) < 1/3$



4. まとめ まとめ

速度一定の仮定のもと
で相対論的平行平板
流における相対論的
輻射輸送を解析的に
解き、一般化された
Milne-Eddington解
を求めた

速度が大きくなるほど
相対論的ピーキング
効果が顕著になるこ
とがわかった



- $f=1/3$

- 今後はより一般的な
場合などを調べる

4. まとめ まとめ

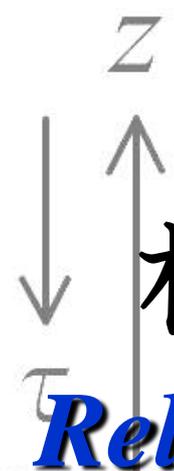
2005年から2008年ぐらいまで、相対論的平行平板流における相対論的輻射輸送問題を、モーメント定式化のもとで、解析的にできる範囲であれこれ調べてきた。

エディントン因子を与えた
速度が一定などの仮定をした

いよいよ相対論的輻射輸送方程式そのものに取り組む段階になった。



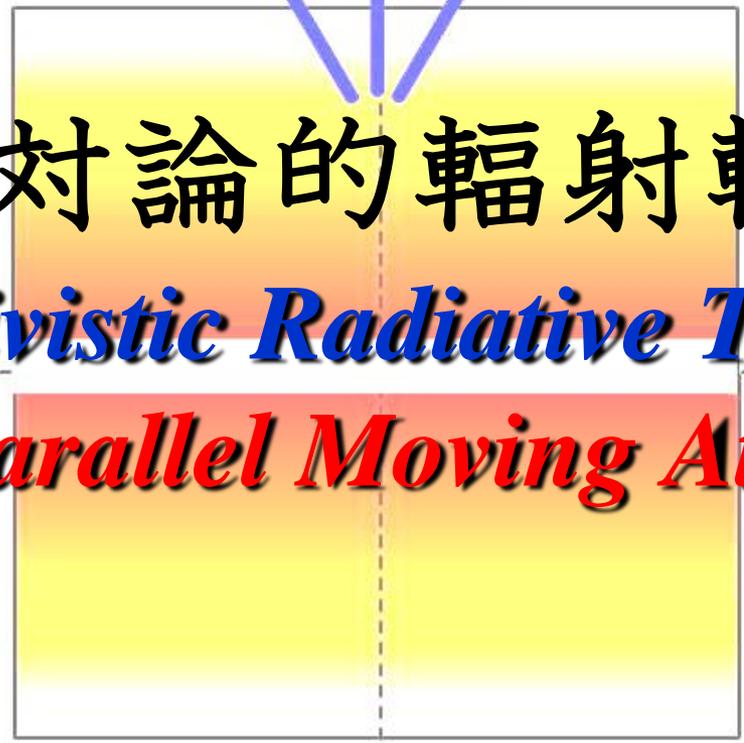




相对論的輻射輸送

Relativistic Radiative Transfer

Plane-Parallel Moving Atmosphere



relativistic peaking

equator

福江 純 @ 大阪教育大学





3 相对論的輻射輸送方程式の 形式解

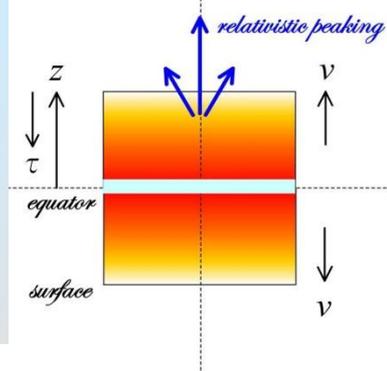
**Relativistic Formal Solutions of
Relativistic Radiative Transfer Equation in
Relativistic Plane-Parallel Flows**





相对論的輻射輸送方程式

- ❁ 定常、一次元平行平板流
- ❁ 等方散乱



$$\mu \frac{dI}{dz} = \rho_0 \frac{1}{\gamma^3 (1 - \beta\mu)^3} \left[\frac{j_0}{4\pi} - (\kappa_0 + \sigma_0) I_0 + \sigma_0 J_0 \right], \quad (1)$$

变换

$$I_0 = \gamma^4 (1 - \beta\mu)^4 I, \quad (2)$$

$$\nu_0 = \gamma (1 - \beta\mu) \nu, \quad (3)$$

$$\mu_0 = \frac{\mu - \beta}{1 - \beta\mu}, \quad (4)$$

$$J_0 = \gamma^2 (J - 2\beta H + \beta^2 K), \quad (5)$$

$$H_0 = \gamma^2 [(1 + \beta^2) H - \beta (J + K)], \quad (6)$$

$$K_0 = \gamma^2 (\beta^2 J - 2\beta H + K). \quad (7)$$

In addition, the Eddington factor f is defined as

$$f \equiv \frac{K_0}{J_0}. \quad (8)$$





相對論的輻射輸送方程式

❁ “光学的厚み” (ここでは無次元座標、注意)

$$d\tau = -(\kappa_0 + \sigma_0) \rho_0 dz, \quad (9)$$

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = \frac{1}{\gamma^3 (1 - \beta\mu)^3} \left[\gamma^4 (1 - \beta\mu)^4 I - S_0 \right]. \quad (10)$$

Here,

$$S_0 = \frac{j_0}{4\pi} \frac{1}{\kappa_0 + \sigma_0} + \frac{\sigma_0}{\kappa_0 + \sigma_0} J_0 \quad (11)$$

$$S_0 = \varepsilon_0 B_0 + (1 - \varepsilon_0) J_0, \quad (12)$$

where

$$\varepsilon_0 \equiv \frac{\kappa_0}{\kappa_0 + \sigma_0} \quad (13)$$

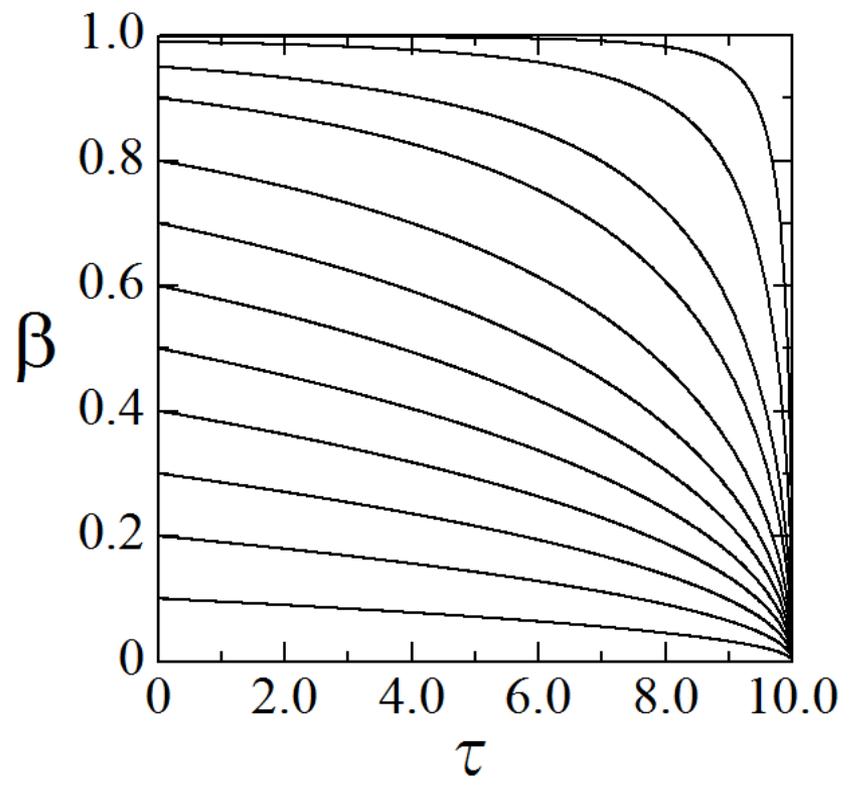




相對論的輻射輸送方程式

❁ 速度場

$$\gamma = (\gamma_s - 1) \left(1 - \frac{\tau}{\tau_b} \right) + 1,$$





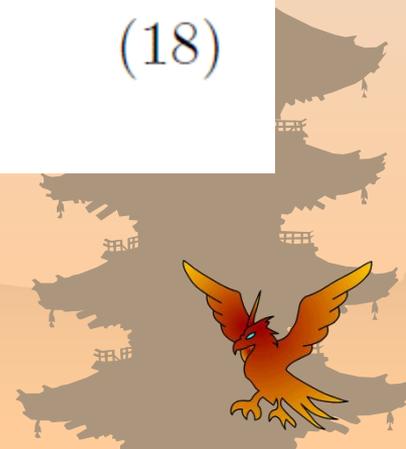
相对論的形式解

❁ 非相对論と同様に形式的に積分

$$\frac{dI}{d\tau} - \frac{\gamma(1-\beta\mu)}{\mu} I = -\frac{1}{\mu} \frac{1}{\gamma^3(1-\beta\mu)^3} S_0. \quad (16)$$

$$X \equiv \exp\left(-\frac{1}{\mu} \int^\tau \gamma dt + \int^\tau \gamma\beta dt\right), \quad (17)$$

$$\frac{d}{d\tau} (XI) = -\frac{1}{\mu} \frac{X}{\gamma^3(1-\beta\mu)^3} S_0, \quad (18)$$





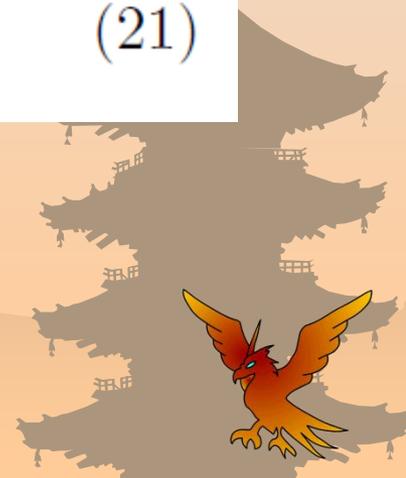
相対論的形式解

- ❁ 非相対論と同様に形式的に積分

$$e^{-G(t)/\mu+U(t)} I|^\tau = - \int \frac{e^{-G(t)/\mu+U(t)}}{\mu\gamma^3(1-\beta\mu)^3} S_0 dt, \quad (19)$$

$$|G(t) \equiv \int^t \gamma(t') dt', \quad (20)$$

$$U(t) \equiv \int^t \gamma(t') \beta(t') dt'. \quad (21)$$





相對論的形式解



Integrating from τ_b to τ , we formally have the upward intensity $I^+(\tau, \mu > 0)$ as

$$I^+(\tau, \mu) = e^{-\frac{G(\tau_b) - G(\tau)}{\mu} + U(\tau_b) - U(\tau)} I^+(\tau_b, \mu) + \int_{\tau}^{\tau_b} \frac{e^{-\frac{G(t) - G(\tau)}{\mu} + U(t) - U(\tau)}}{\mu \gamma^3 (1 - \beta \mu)^3} S_0 dt, (22)$$

whereas integrating from 0 to τ , we have the downward intensity $I^-(\tau, \mu < 0)$ as

$$I^-(\tau, \mu) = \int_0^{\tau} \frac{e^{-\frac{G(\tau) - G(t)}{(-\mu)} - [U(\tau) - U(t)]}}{(-\mu) \gamma^3 [1 + \beta(-\mu)]^3} S_0 dt. (23)$$





4 相対論的平行平板流における 相対論的輻射輸送とエディントン因 子の振る舞い

**Relativistic Radiative Transfer in
Relativistic Plane-Parallel Flows and
Behavior of the Eddington Factor**





散乱のみ (RE)

❁ 散乱のみ (RE)

$$S_0 = J_0, \quad (24)$$

As boundary conditions for the RE case, we set

$$I^-(0, \mu < 0) = 0 \quad (25)$$

at the flow top of $\tau = 0$ (no irradiation), which was already used in equation (23), and

$$I^+(\tau_b, \mu) = I^* + I^-(\tau_b, -\mu) \quad (26)$$

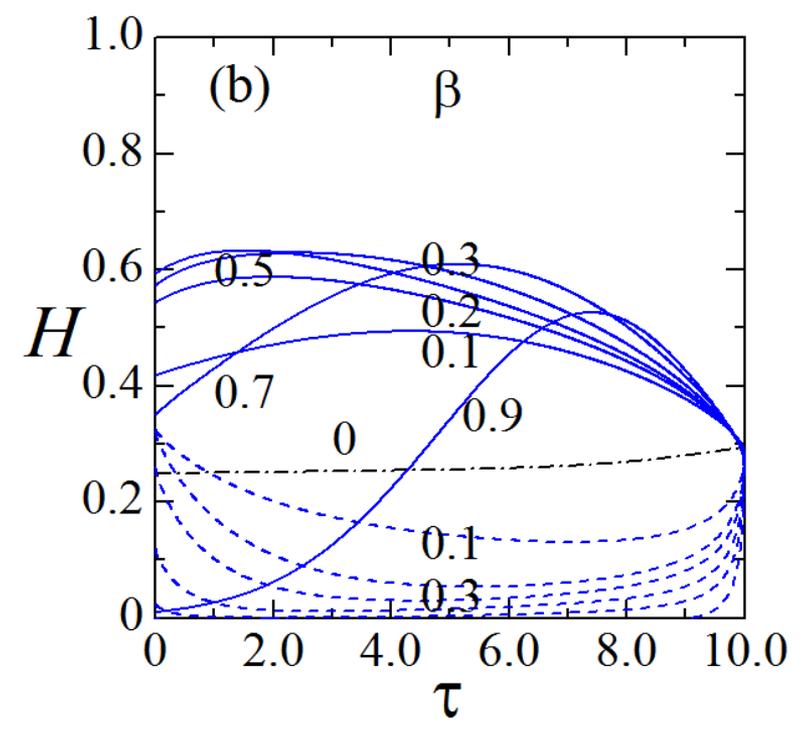
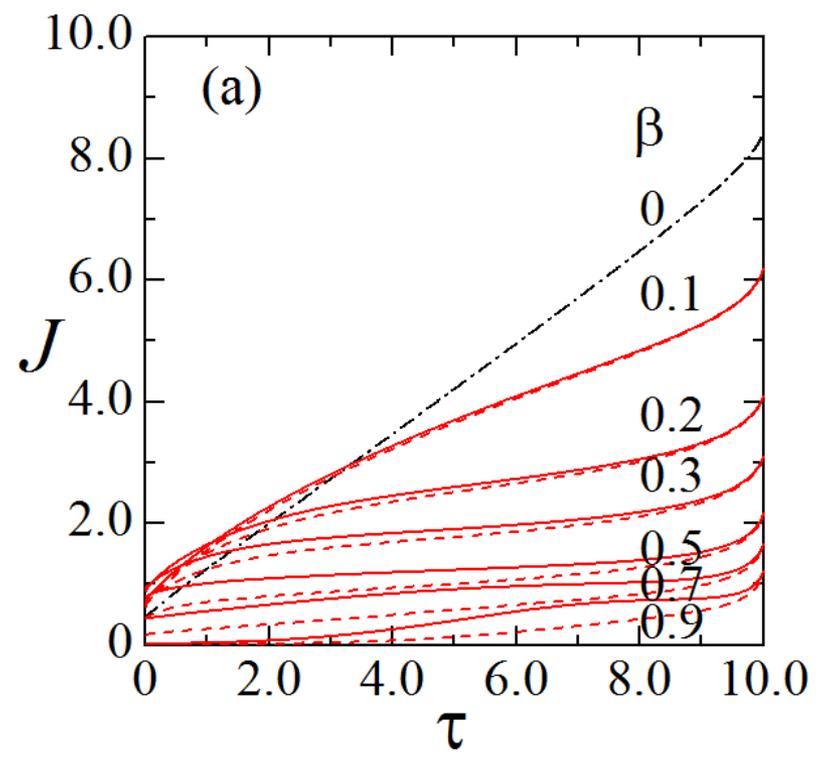
at the flow base of τ_b , where I^* is the uniform incident intensity at the flow base.





散乱のみ (RE)

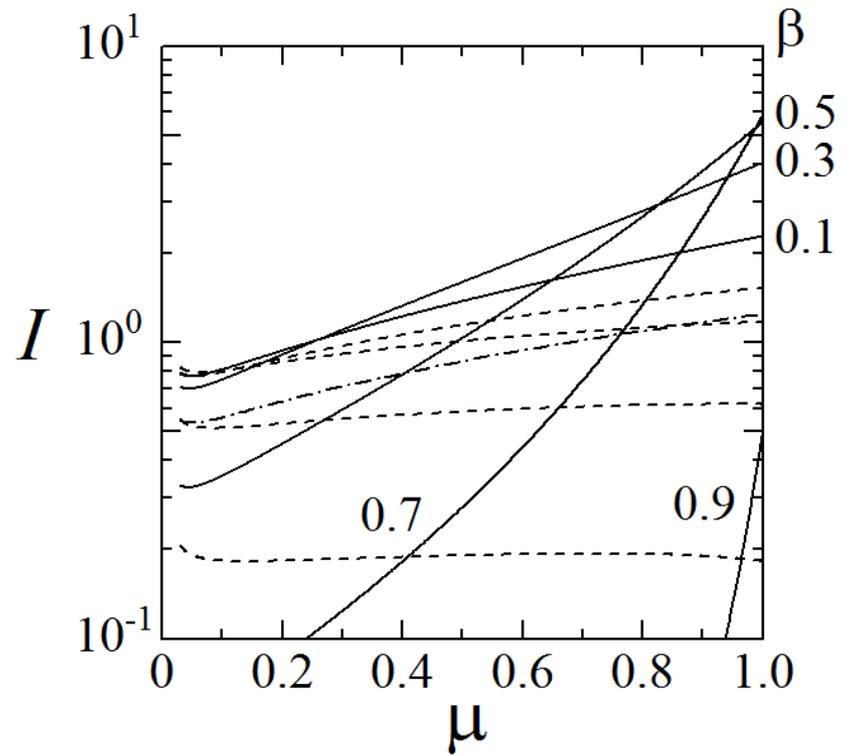
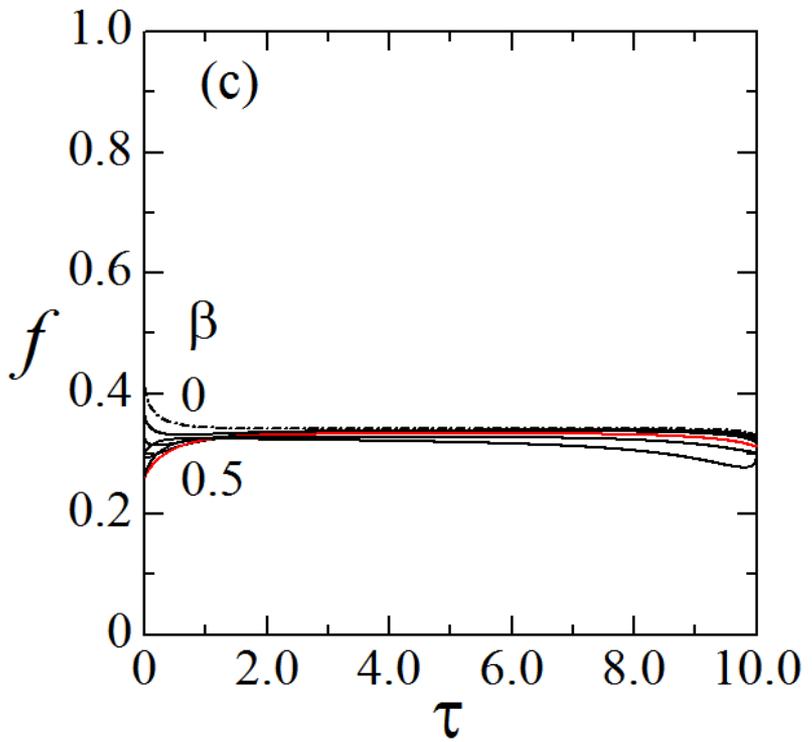
- ❁ モーメント量 (波線: 共動系、実線: 静止系)





散乱のみ (RE)

エディントン因子と表面輝度





散乱なし(LTE)

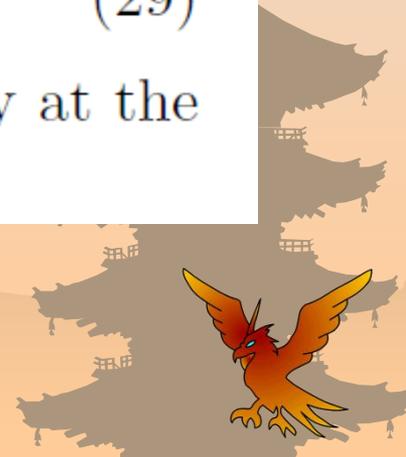
❁ 散乱なし(LTE)

$$S_0 = B_0 = B_0(0) + b_0\tau, \quad (28)$$

As boundary conditions for the LTE case, we set $I^-(0, \mu < 0) = 0$ at the flow top of $\tau = 0$ (no irradiation), which was already used in equation (23), and

$$I^+(\tau_b, \mu) = I^-(\tau_b, -\mu) \quad (29)$$

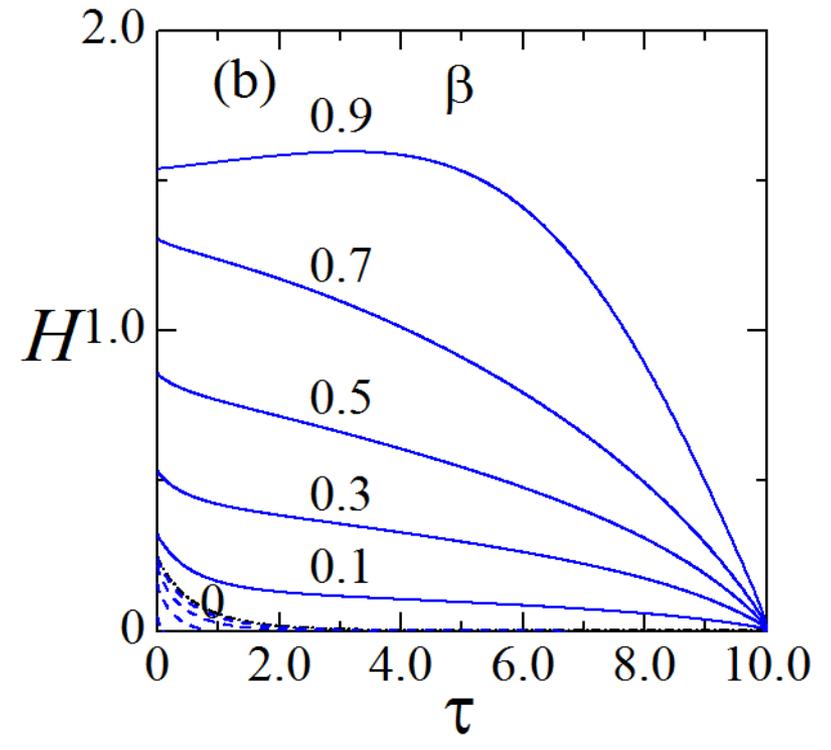
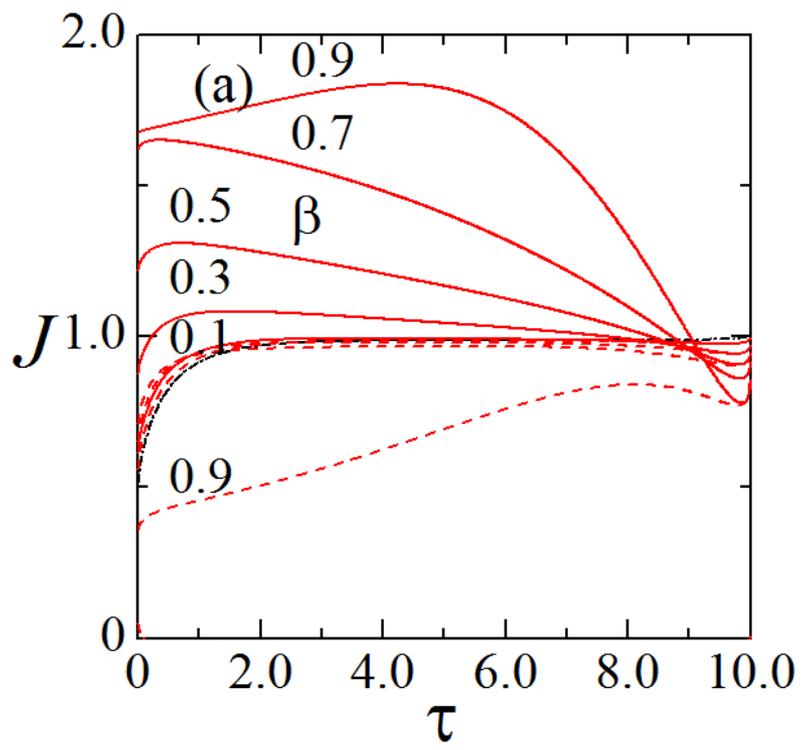
at the flow base of τ_b ; we set no incident intensity at the flow base.





散乱なし(LTE)

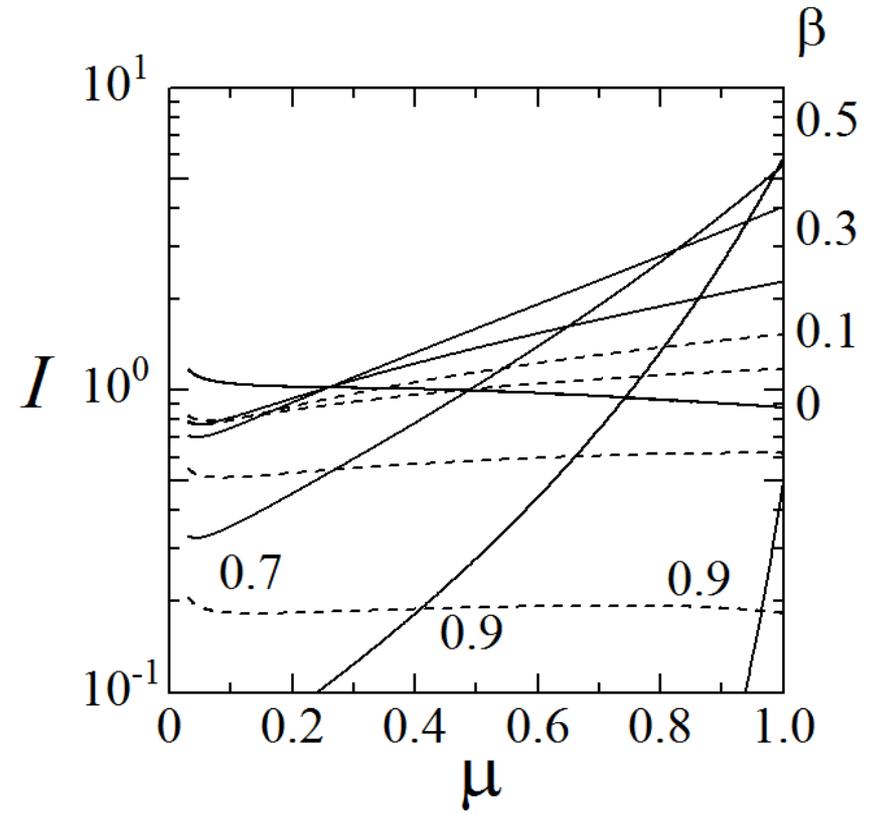
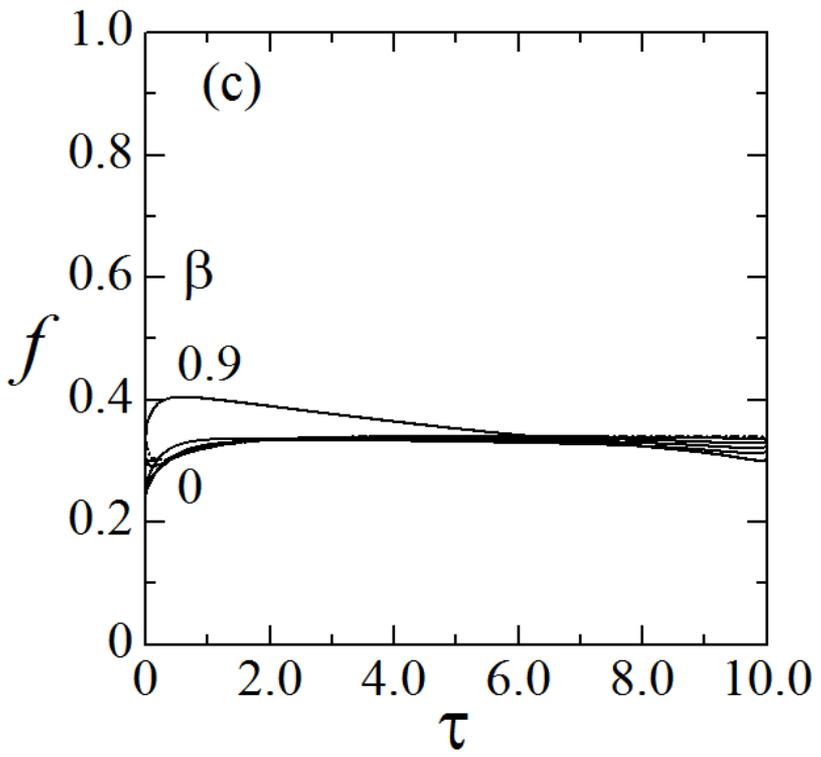
❁ モーメント量 (波線: 共動系、実線: 静止系)





散乱なし(LTE)

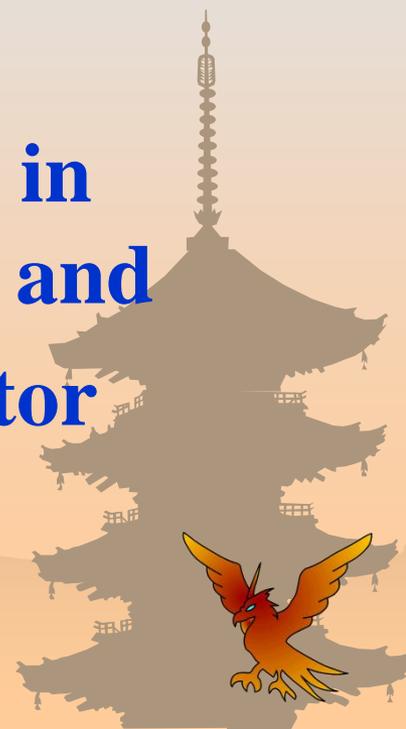
エディントン因子と表面輝度





4 相対論的平行平板流における 相対論的輻射輸送とエディントン因 子の振る舞い

**Relativistic Radiative Transfer in
Relativistic Plane-Parallel Flows and
Behavior of the Eddington Factor**

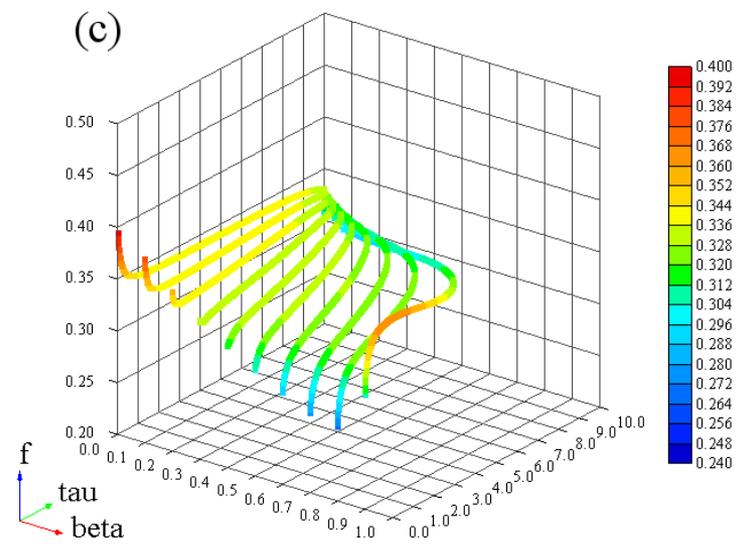
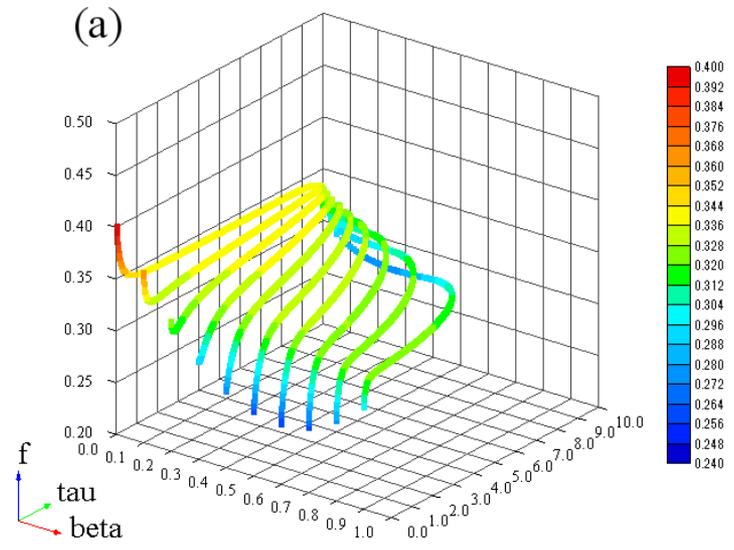
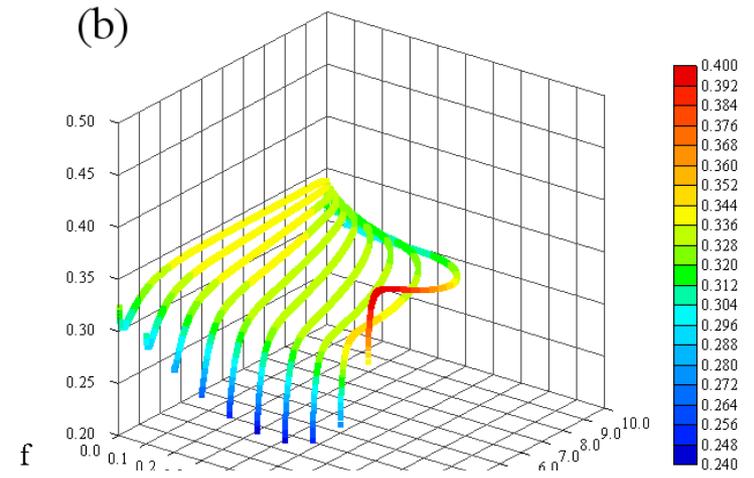




エディントン因子の振る舞い

✿ $f(\beta, \tau)$

- RE
- LTE ($b=0$)
- LTE ($b=1.5$)





エディントン因子の評価

❁ 光学的に薄い極限

$$J_0 = \gamma^2 (1 - \beta + \beta^2/3) I^*,$$

$$K_0 = \gamma^2 (\beta^2 - \beta + 1/3) I^*.$$

and we have

$$f(\text{thin}) = \frac{K_0}{J_0} = \frac{1 - 3\beta + 3\beta^2}{3 - 3\beta + \beta^2}.$$

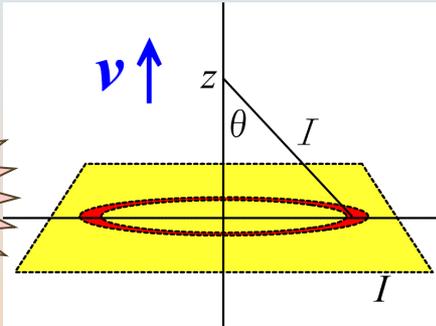




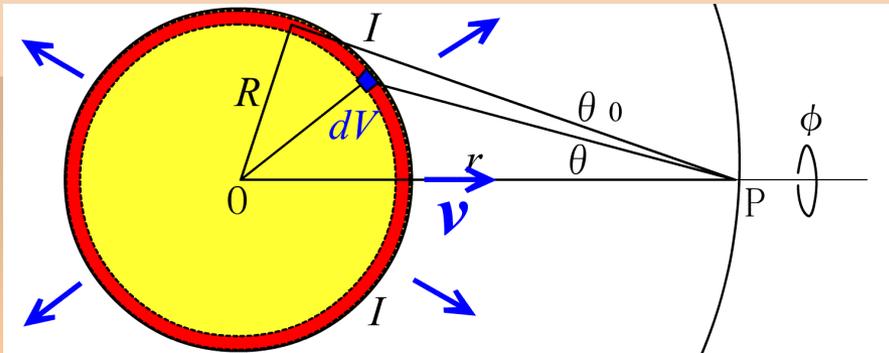
2. RRHD Eddington Factor

Eddington factor in an optically thin regime

plane-parallel

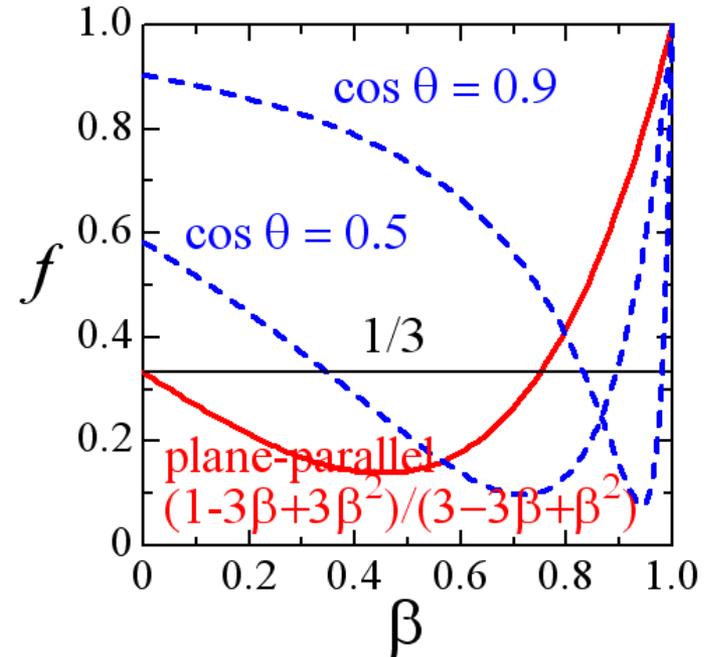


spherical



plane - parallel

$$f = \frac{P_0}{E_0}$$



spherical

$$f = \frac{P_0}{E_0}$$





エディントン因子の評価

❁ 非相対論的ケース ($\beta=0$)

$$I^+(\tau, \mu > 0) = S_0 \left(1 - e^{-(\tau_b - \tau)/\mu} \right), \quad (33)$$

$$I^-(\tau, \mu < 0) = S_0 \left(1 - e^{\tau/\mu} \right). \quad (34)$$

Except for the boundaries of $\tau \sim 0$ and $\tau \sim \tau_b$, the exponential terms can be dropped, and the leading terms are S_0 . Thus, the moment quantities become, respectively,

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 I^+ d\mu + \frac{1}{2} \int_{-1}^0 I^- d\mu = S_0, \quad (35)$$

$$K = \frac{1}{2} \int_0^1 I^+ \mu^2 d\mu + \frac{1}{2} \int_{-1}^0 I^- \mu^2 d\mu = \frac{1}{3} S_0, \quad (36)$$

and the Eddington factor is shown as $1/3$.





エディントン因子の評価

- ❁ 相対論的ケース: $(1 - \beta\mu)$ が小さくない

$$\begin{aligned} I^+(\tau, \mu) &= \int_{\tau}^{\tau_b} \frac{e^{-\frac{\gamma(1-\beta\mu)}{\mu}(t-\tau)}}{\mu\gamma^3(1-\beta\mu)^3} S_0 dt \\ &= \frac{S_0}{\gamma^4(1-\beta\mu)^4} \left[1 - e^{-\frac{\gamma(1-\beta\mu)}{\mu}(\tau_b - \tau)} \right] \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} I^-(\tau, \mu) &= \int_0^{\tau} \frac{e^{-\frac{\gamma(1-\beta\mu)}{(-\mu)}(\tau-t)}}{(-\mu)\gamma^3[1+\beta(-\mu)]^3} S_0 dt \\ &= \frac{S_0}{\gamma^4(1-\beta\mu)^4} \left[1 - e^{\frac{\gamma(1-\beta\mu)}{\mu}\tau} \right]. \end{aligned} \quad (38)$$





エディントン因子の評価

❁ 相対論的ケース: $(1 - \beta\mu)$ が小さくない

are $S_0/[\gamma^4(1 - \beta\mu)^4]$. In terms, we have the moments as

$$J = S_0\gamma^2 \frac{3 + \beta^2}{3},$$

$$H = S_0\gamma^2 \frac{4\beta}{3},$$

$$K = S_0\gamma^2 \frac{1}{3}.$$

Then, although the Eddington factor is $K/J = 1/(3 + \beta^2)$, by using (7) and (8), the Eddington factor becomes

$$f = \frac{K_0}{J_0} = \frac{1}{3}.$$





エディントン因子の評価

- ❁ 相対論的ケース: $(1 - \beta\mu)$ が十分に小さい

$$I^+ \sim \frac{S_0}{\gamma^3(1 - \beta\mu)^3\mu}(\tau_b - \tau) \quad (\beta \sim \mu \sim 1). \quad (43)$$

In this case, the moment quantities in the inertial frame are roughly estimated as

$$J = S_0\gamma^2 \frac{3 + \beta^2}{3}(1 - \Delta\mu) + \frac{S_0}{\gamma^3(1 - \beta)^3} \frac{\Delta\mu}{2}(\tau_b - \tau), \quad (44)$$

$$H = S_0\gamma^2 \frac{4\beta}{3}(1 - \Delta\mu) + \frac{S_0}{\gamma^3(1 - \beta)^3} \frac{\Delta\mu}{4}(\tau_b - \tau), \quad (45)$$

$$K = S_0\gamma^2 \frac{1}{3}(1 - \Delta\mu) + \frac{S_0}{\gamma^3(1 - \beta)^3} \frac{\Delta\mu}{6}(\tau_b - \tau), \quad (46)$$





エディントン因子の評価

- ❁ 相対論的ケース: $(1 - \beta\mu)$ が十分に小さい

$$f = \frac{K_0}{J_0} = \frac{(1 - \Delta\mu)/3 + A\Delta\mu(1 - 3\beta + 3\beta^2)}{(1 - \Delta\mu) + A\Delta\mu(3 - 3\beta + \beta^2)}, \quad (47)$$

where

$$A \equiv \frac{\tau_b - \tau}{6\gamma(1 - \beta)}. \quad (48)$$

Thus, under this simple model and estimation, in the limit of $\beta \sim 1$, the Eddington factor approaches unity. It is interesting that the same factors with the optically thin limit (32) also appear in this equation (47).



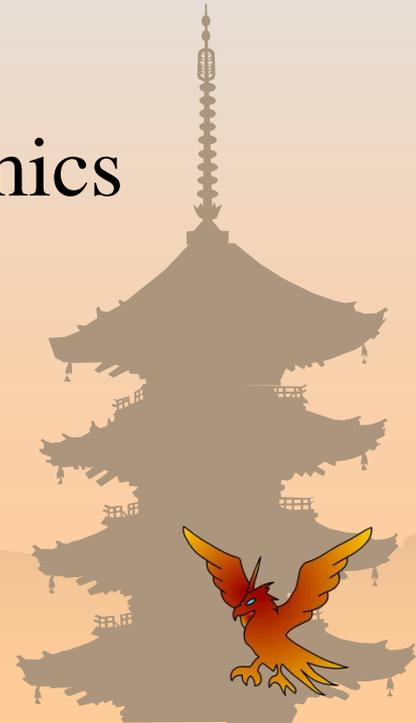


相対論的輻射流体力学の定式化

5 今後の課題

Relativistic Radiation Hydrodynamics

5 Open Problems





今後のお宝：天体現象

輻射場が重要な相対論的天体現象全般

- ❁ ブラックホール降着流：光子捕捉
- ❁ 相対論的天体風：超相対論的ジェット
- ❁ 相対論的爆発：GRBファイアボール
- ❁ ニュートリノ円盤：ニュートリノトラス
- ❁ 初期宇宙：最初の降着円盤、最初のジェット





今後のお宝：基礎過程

基礎過程：相対論的輻射流体力学の定式化

- 数値的な方法
- 解析的な方法 (変動エディントン因子の導出)
 - 球対称、振動数依存、線スペクトル

亜光速風中の輻射輸送

- 降着円盤風 (ME解)
- 球対称風
- 照射の効果

相対論的輻射流体風

- 降着円盤風
- 球対称風
- 回転の効果
- ガス圧、磁場の効果
- 電子・陽電子対
- ニュートリノ

ブラックホール風の見え方

- 見かけの光学的厚み
- 温度分布、光度、スペクトル

