



エディントン限界：再考

*Eddington Limit
for a Gaseous Stratus
with Finite Optical Depth*

福江 純 @ 大阪教育大学





目次

- 0 エディントン限界という“常識”
- 1 新しい臨界条件のまとめ
- 2 基礎方程式
- 3 モーメント方程式の解析解
- 4 エディントン近似での臨界条件と問題点
- 5 輻射輸送方程式の数値解
- 6 新臨界条件の近似公式
- 7 物理的説明
- 8 今後の課題





0 エディントン限界という“常識”

- ✿ エディントン光度以上だとガスは吹き飛ばされる
- ✿ エディントン光度以下だとガスは降着できる
 - ヘリウムガス、ee対プラズマ、ダスト
 - 超臨界降着
 - porous medium, photon bubbles

エディントン光度は降着問題のCentral Dogma

- ✿ ? 岩石、中性子星＝無限大の光学的厚み
- ✿ では、有限の光学的厚みをもったガス層雲では





1 新しい臨界条件のまとめ 状況



❁ 球対称光源

$$L, M, R^*; L = 4\pi R^* \pi I^*$$

❁ 層雲

$$\tau_c, S, m; \tau_c = \kappa_{es} m/S$$

❁ 位置

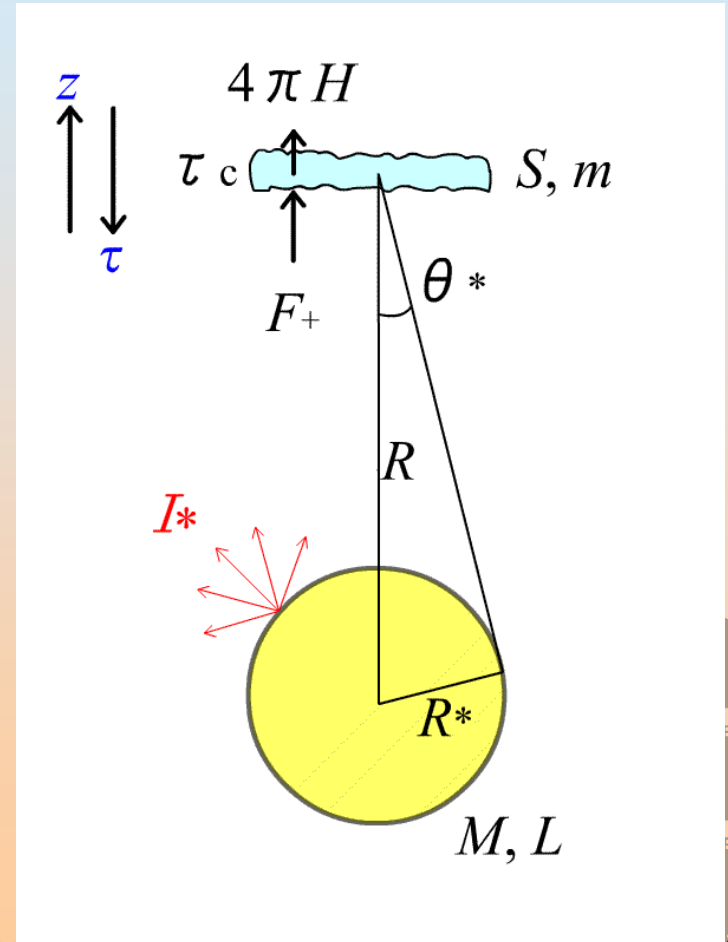
$$R; \mu^* = \sqrt{1 - R^{*2}/R^2}$$

エディントン光度

$$L_E = 4\pi c G M / \kappa_{es}$$

エディントンパラメータ

$$\Gamma = L/L_E$$





1 新しい臨界条件のまとめ

新条件



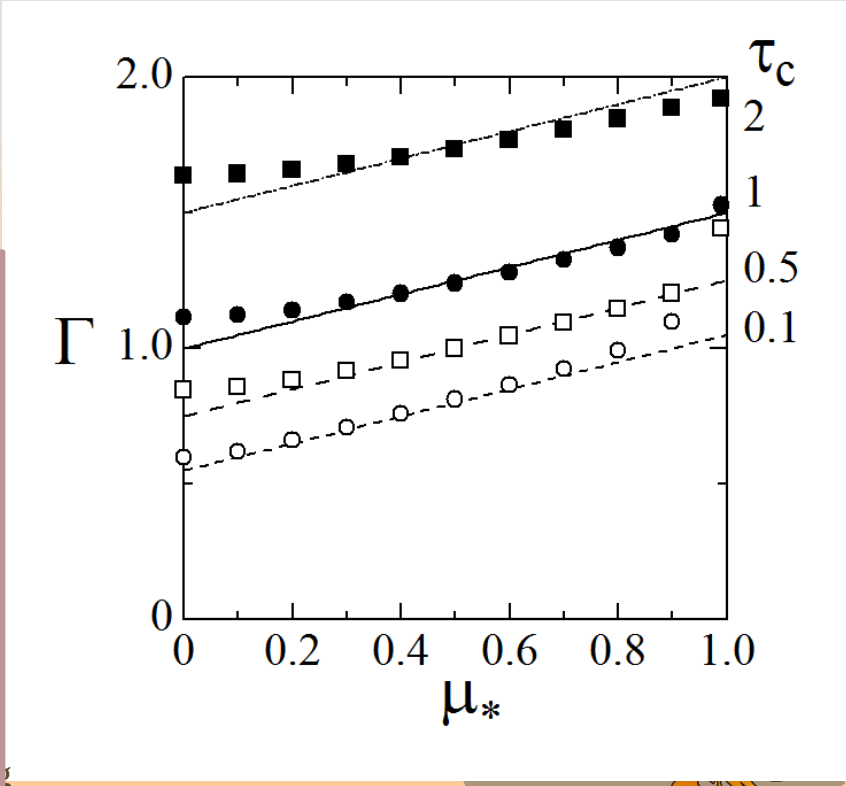
$$\Gamma \approx 1 \quad \tau_c \approx 1$$

$$\Gamma \approx \frac{\tau_c}{2} \quad \text{optically thick}$$

$$\Gamma = \frac{1 + \mu_*}{2} \quad \text{optically thin}$$

$$\Gamma = \frac{1 + \mu_* + \tau_c}{2}$$

層雲の光学的厚みが1程度なら古典的エディントン光度とほぼ一致する
光学的に厚い層雲では臨界条件は上がる
（超エディントン光度でも降着可能
→超大質量ブラックホール形成問題の解決）
光学的に薄い層雲だと臨界条件は下がる
（亜エディントン光度でも楽々吹き飛ばせる
→BALクェーサーやUFO問題の解決）





2 基礎方程式

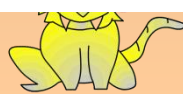
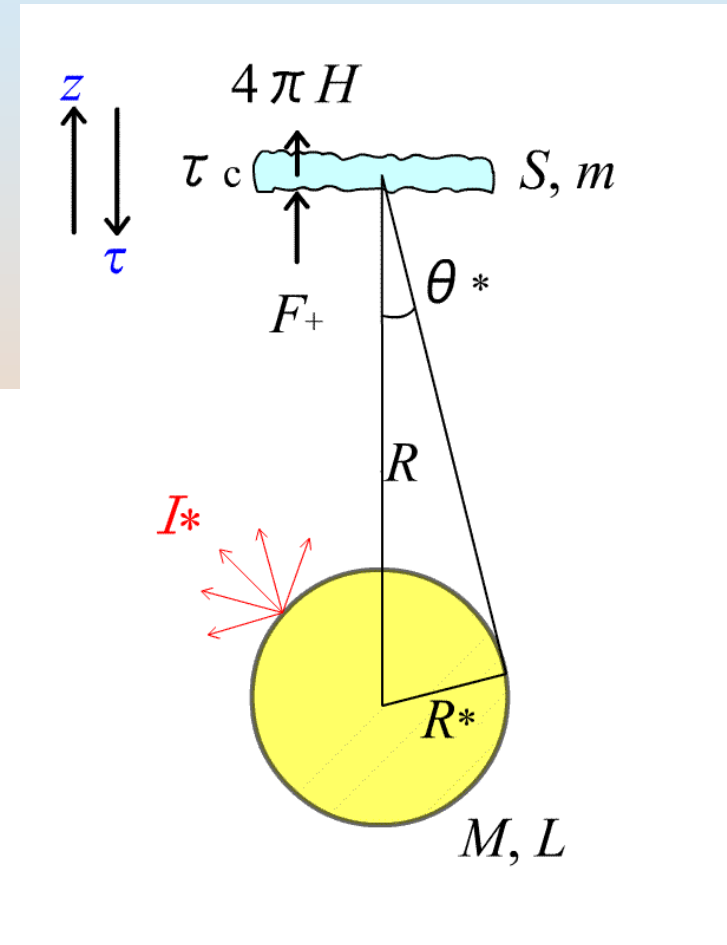
- ❁ 輻射輸送方程式
- ❁ 境界条件
- ❁ 散乱のみ

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - S = I - J,$$

$$I^-(0, \mu \leq 0) = 0,$$

$$I^+(\tau_c, \mu \geq 0) = I_* \quad (\mu_* \leq \mu \leq 1),$$

$$\mu_* = \cos \theta_* = \sqrt{1 - \frac{R_*^2}{R^2}}.$$





2 基礎方程式

- ❁ モーメント方程式
- ❁ 境界条件

- ❁ 散乱のみ

- ❁ f : エディントン因子

$$1/3 < f < 1$$

- ❁ c_0 : 境界係数

$$2 > c_0 > 1$$



2015/3/3

$$\frac{dH}{d\tau} = J - S = 0,$$

$$\frac{dK}{d\tau} = H,$$

$$K = fJ$$

$$J(0) \equiv \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I d\mu = \frac{1}{2} \int_0^1 I^+ d\mu = c_1 \bar{I}^+,$$

$$H(0) \equiv \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I \mu d\mu = \frac{1}{2} \int_0^1 I^+ d\mu = c_2 \bar{I}^+,$$

$$J(0) = c_0 H(0),$$

$$J(\tau_c) = c_1 \bar{I}^- + \frac{1}{2} \int_{\mu_*}^1 I_* d\mu = c_1 \bar{I}^- + \frac{1}{2} I_* (1 - \mu_*),$$

$$H(\tau_c) = -c_2 \bar{I}^- + \frac{1}{2} \int_{\mu_*}^1 I_* \mu d\mu = -c_2 \bar{I}^- + \frac{1}{4} I_* (1 - \mu_*^2),$$

$$J(\tau_c) = -c_0 H(\tau_c) + I_* \frac{2 - \mu_* - \mu_*^2}{2}.$$



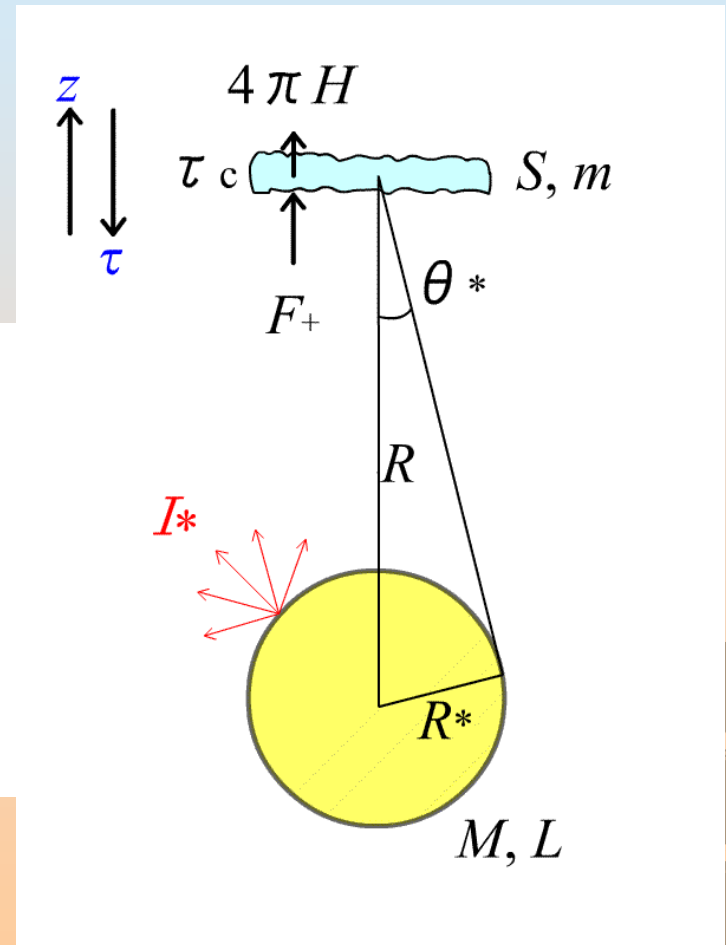
2 基礎方程式

- ❁ 運動方程式
- ❁ ネットフラックス

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{GM}{R^2} + \frac{S}{mc} F_{\text{net}},$$

$$F_{\text{net}} = F^+ + 4\pi H^-(\tau_c) - 4\pi H^+(0).$$

$$F^+ = \frac{L}{4\pi R^2} = \pi I_* \frac{R_*^2}{R^2} = \pi I_* (1 - \mu_*^2).$$



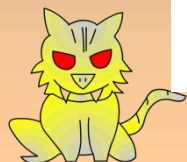


3 モーメント方程式の解析解

$$J(\tau) = \left(\frac{1}{f} \tau + c_0 \right) H_1,$$

$$H(\tau) = H_1 = \frac{1}{2c_0 + \tau_c/f} \frac{2 - \mu_* - \mu_*^2}{2} I_*.$$

$$\begin{aligned} F &= 2(F^+ - 4\pi H) \\ &= 2\pi I_* \left(\frac{R_*^2}{R^2} - \frac{4}{2c_0 + \tau_c/f} \frac{2 - \mu_* - \mu_*^2}{2} \right) \\ &= 2\pi I_* \frac{R_*^2}{R^2} \left[1 - \frac{4}{2c_0 + \tau_c/f} \frac{2 - \mu_* - \mu_*^2}{2(1 - \mu_*^2)} \right] \\ &= 2 \frac{L}{4\pi R^2} \left[1 - \frac{4}{2c_0 + \tau_c/f} \frac{2 + \mu_*}{2(1 + \mu_*)} \right]. \end{aligned}$$





3 モーメント方程式の解析解

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= -\frac{GM}{R^2} \left(1 - \frac{SR^2}{GMmc} F_{\text{net}} \right) \\ &= -\frac{GM}{R^2} \left(1 - \frac{SL}{4\pi GMmc} \frac{4\pi R^2}{L} F_{\text{net}} \right) \\ &= -\frac{GM}{R^2} \left\{ 1 - \frac{S}{m\kappa_{\text{es}}} \frac{L}{L_{\text{E}}} 2 \left[1 - \frac{4}{2c_0 + \tau_c/f} \frac{2 + \mu_*}{2(1 + \mu_*)} \right] \right\} \\ &= -\frac{GM}{R^2} \left\{ 1 - \frac{2\Gamma}{\tau_c} \left[1 - \frac{4}{2c_0 + \tau_c/f} \frac{2 + \mu_*}{2(1 + \mu_*)} \right] \right\}, \quad (24)\end{aligned}$$

$$\Gamma = \frac{\tau_c}{2} \left[1 - \frac{4}{2c_0 + \tau_c/f} \frac{2 + \mu_*}{2(1 + \mu_*)} \right]^{-1},$$





4 エディントン近似での 臨界条件と問題点

✿ $f=1/3, c_0=2$

$$\Gamma = \frac{\tau_c}{2} \left[1 - \frac{4}{4 + 3\tau_c} \frac{2 + \mu_*}{2(1 + \mu_*)} \right]^{-1}.$$

✿ 光学的に厚いと($\tau_c \rightarrow$ 大)

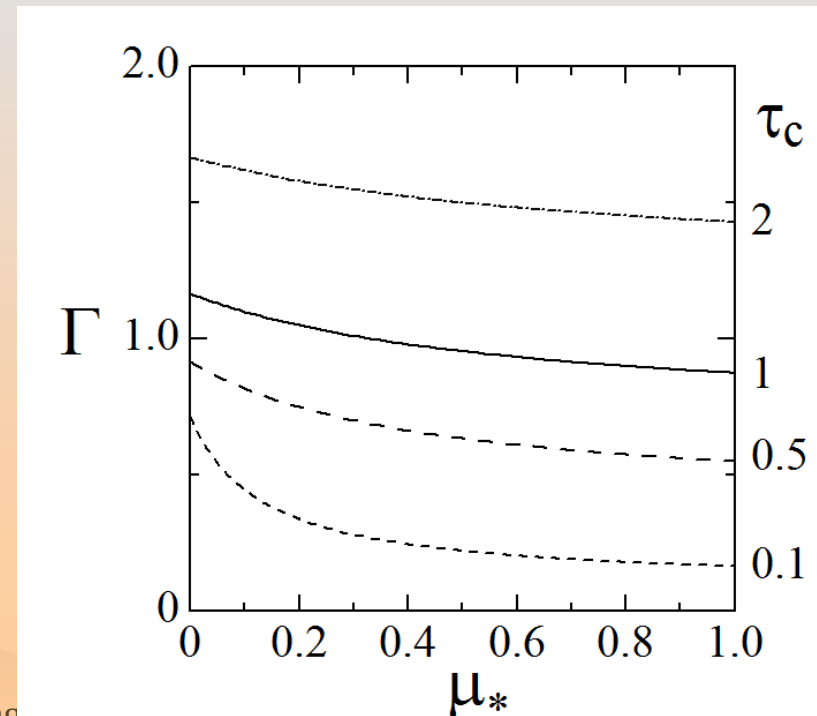
$$\Gamma \sim \tau_c/2$$

✿ 光学的に薄いと

Γ は下がる

✿ 問題点

光学的に薄くなるとダメ





5 輻射輸送方程式の数値解

❁ 輻射輸送方程式を数値的に解く

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - S = I - J,$$

$$I^-(0, \mu \leq 0) = 0,$$

$$I^+(\tau_c, \mu \geq 0) = I_* \quad (\mu_* \leq \mu \leq 1),$$

$$\mu_* = \cos \theta_* = \sqrt{1 - \frac{R_*^2}{R^2}}.$$

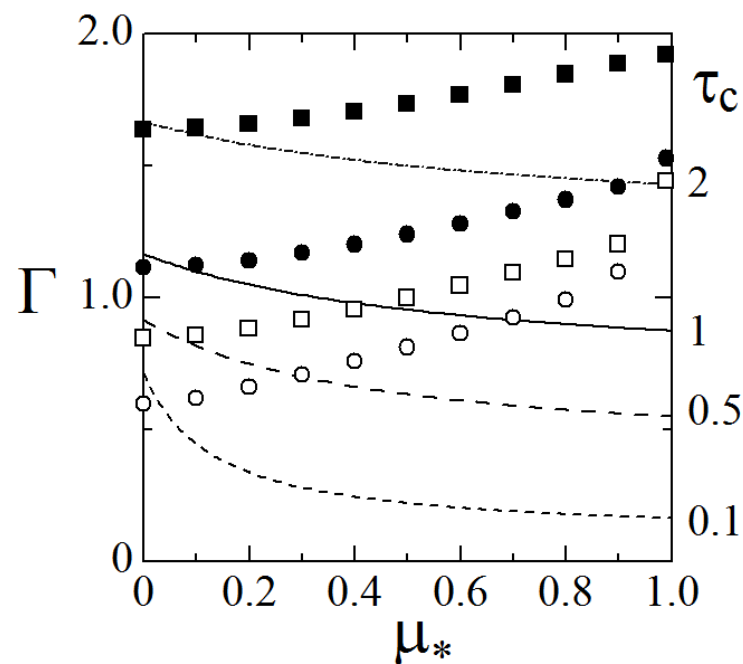
❁ 数値解: ■、●、□、○

❁ initial guess 解析解の J

❁ 定義より J , H を計算

❁ 収束するまで繰り返す

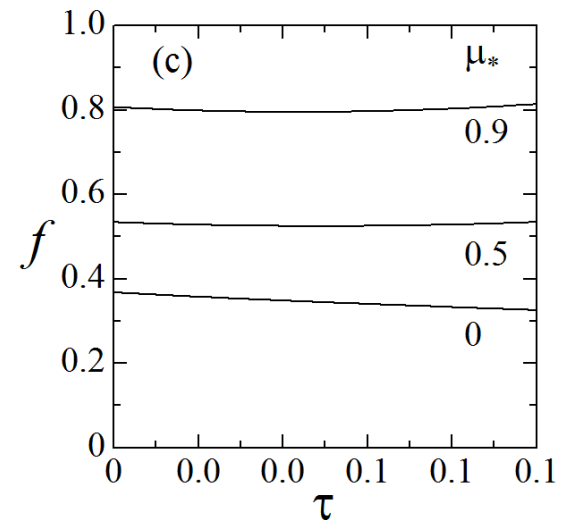
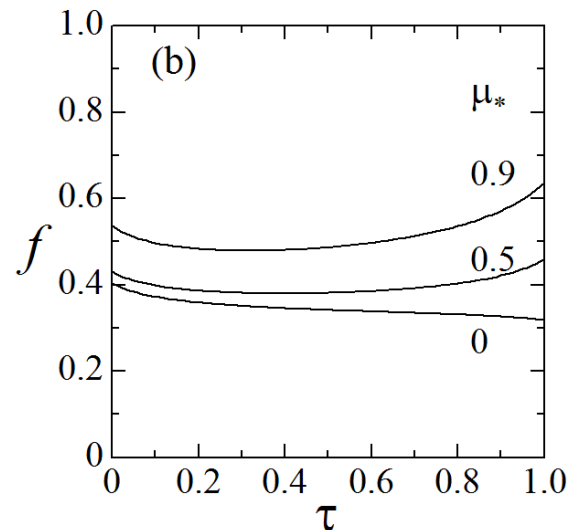
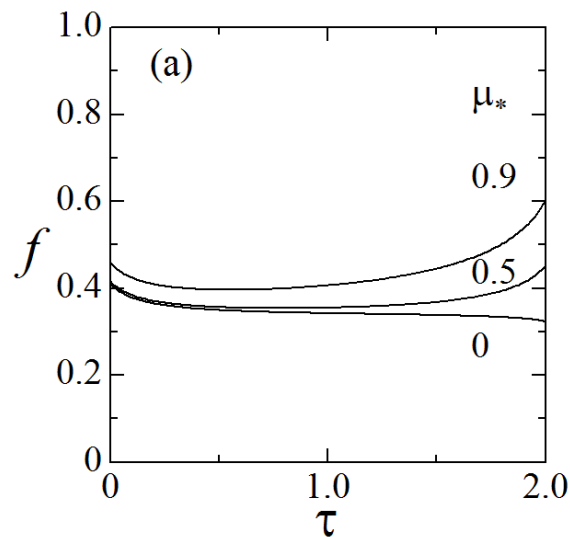
❁ 定義より $H(0)$, $H(\tau_c)$





5 輻射輸送方程式の数値解

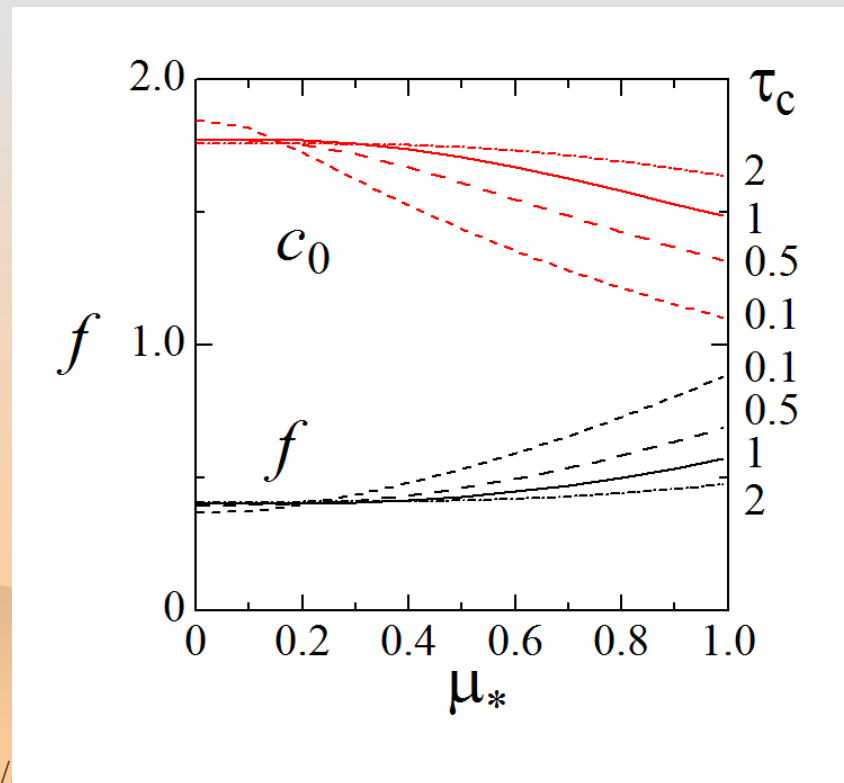
- ✿ エディントン因子 $f(\tau)$
- ✿ τ 依存性は比較的弱い
- ✿ τ_c や μ_* の依存性は強い





5 輻射輸送方程式の数値解

- ✿ エディントン因子 $f(\tau_c, \mu^*)$
- ✿ 境界係数 $c_0(\tau_c, \mu^*)$





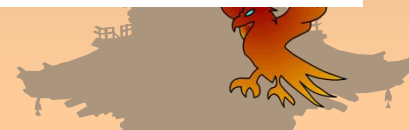
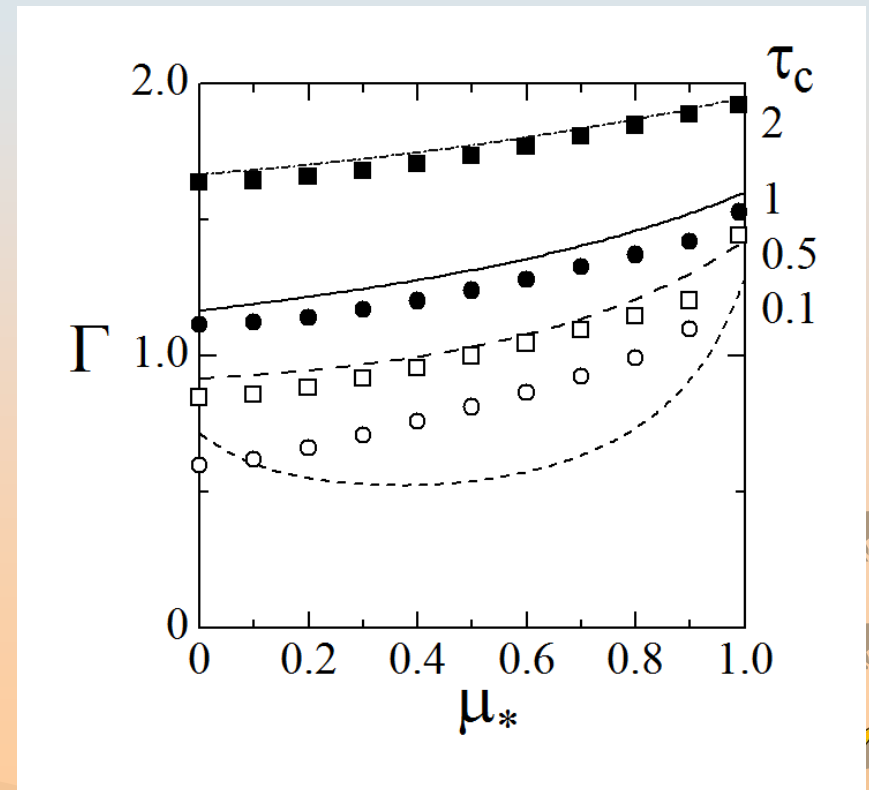
6 新臨界条件の近似公式

✿ fittingの一例

$$f = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2} - 0.1\tau_c \right) \mu_*,$$
$$c_0 = 2 - \frac{1}{2}\mu_*.$$

✿ 光学的に薄いとダメ

そこで heuristic approach





6 新臨界条件の近似公式

- ❁ 輻射輸送方程式を**光学的に薄い極限**で解析的に解く
- ❁ $\tau, \tau_c, t \ll 1$

$$I^+(\tau, \mu > 0) = I_* e^{-(\tau_c - \tau)/\mu} + \int_{\tau}^{\tau_c} e^{-(t - \tau)/\mu} J(t) \frac{dt}{\mu},$$

$$I^-(\tau, \mu < 0) = - \int_0^{\tau} e^{-(t - \tau)/\mu} J(t) \frac{dt}{\mu},$$

$$I^+(\tau, \mu > 0) = I_* \left(1 - \frac{\tau_c}{\mu} + \frac{\tau}{\mu} \right) + \frac{1}{\mu} J(\tau_c) (\tau_c - \tau),$$

$$I^-(\tau, \mu < 0) = \frac{1}{\mu} J(0) \tau.$$





6 新臨界条件の近似公式

✿ thin limit

$$\begin{aligned} H^+(0) &\equiv \frac{1}{2} \int_0^1 I^+(0) \mu d\mu \\ &= \frac{I_*}{2} \int_{\mu_*}^1 (\mu - \tau_c) d\mu + \frac{1}{2} \int_0^1 J(\tau_c) \tau_c d\mu \\ &= \frac{I_*}{2} \left[\frac{1 - \mu_*^2}{2} - \tau_c (1 - \mu_*) \right] + \frac{1}{2} J(\tau_c) \tau_c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^-(\tau_c) &\equiv \frac{1}{2} \int_{-1}^0 I^-(\tau_c) \mu d\mu \\ &= \frac{1}{2} J(0) \tau_c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{\text{net}} &\sim \pi I_* (1 - \mu_*^2) + 4\pi H^-(\tau_c) - 4\pi H^+(0) \\ &= 2\pi I_* (1 - \mu_*) \tau_c + 2\pi [J(0) - J(\tau_c)] \tau_c \\ &\sim 2\pi I_* (1 - \mu_*) \tau_c, \end{aligned}$$

$$\Gamma = \tau_c \frac{L/4\pi R^2}{F_{\text{net}}} = \frac{1 + \mu_*}{2}. \quad (\tau_c \rightarrow 0)$$





6 新臨界条件の近似公式

❁ 一致させる

$$\Gamma = \tau_c \frac{L/4\pi R^2}{F_{\text{net}}} = \frac{1 + \mu_*}{2}. \quad (\tau_c \rightarrow 0)$$

$$\Gamma = \frac{\tau_c}{2} \left[1 - \frac{4}{2c_0 + \tau_c/f} \frac{2 + \mu_*}{2(1 + \mu_*)} \right]^{-1},$$

$$2c_0 f = 1 + \mu_*,$$

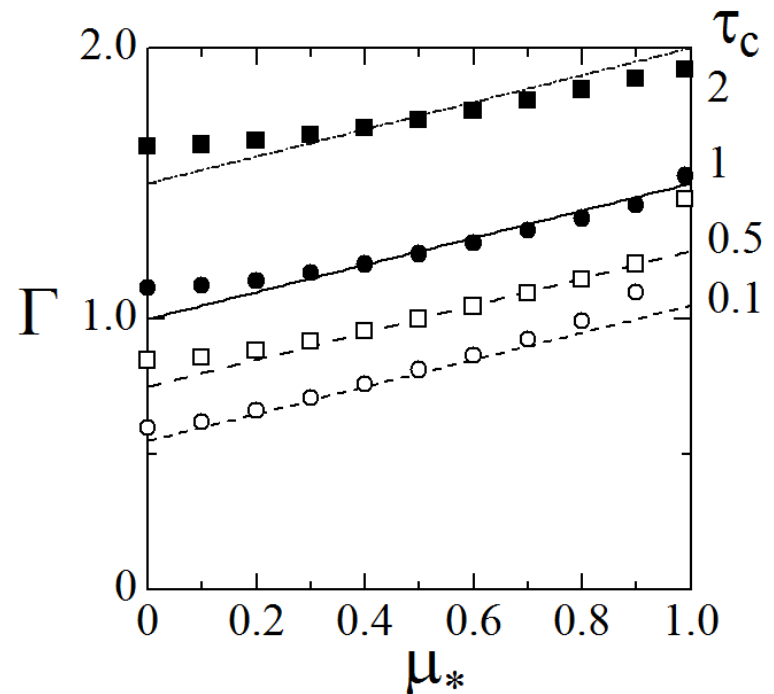
$$f = \frac{(1 + \mu_*)^2}{2(2 + \mu_*)},$$

$$c_0 = \frac{2 + \mu_*}{1 + \mu_*}.$$

$$\Gamma = \frac{1 + \mu_* + \tau_c}{2}.$$

❁ 数値解: ■、●、□、○

❁ 近似公式: 直線





7 物理的説明

- optical depth effect

$$S/m = \kappa_c : \tau_c = 1 \dots \kappa_c = \kappa_{es}$$

$$\tau_c \text{大} : \Gamma \sim \tau_c/2$$

- translucent effect

$$F_{\text{net}}/(L/4\pi R^2) \sim 2\tau_c/(1 + \mu^* + \tau_c)$$

$$\tau_c \text{小} : \text{輻射場非等方}$$

$$R \text{大} (\mu^* \text{大}) : \text{輻射場非等方}$$

- scattering view point (因子2の由来)

電子散乱...散乱後の光子は等方に逃げる
層雲.....散乱後の光子は上下方向のみ



$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\frac{GM}{R^2} + \frac{S}{mc} F_{\text{net}}, \\ &= -\frac{GM}{R^2} \left(1 - \frac{SR^2}{GMmc} F_{\text{net}} \right) \\ \Gamma &= \tau_c \frac{L/4\pi R^2}{F_{\text{net}}}. \end{aligned}$$



1 新しい臨界条件のまとめ

新条件



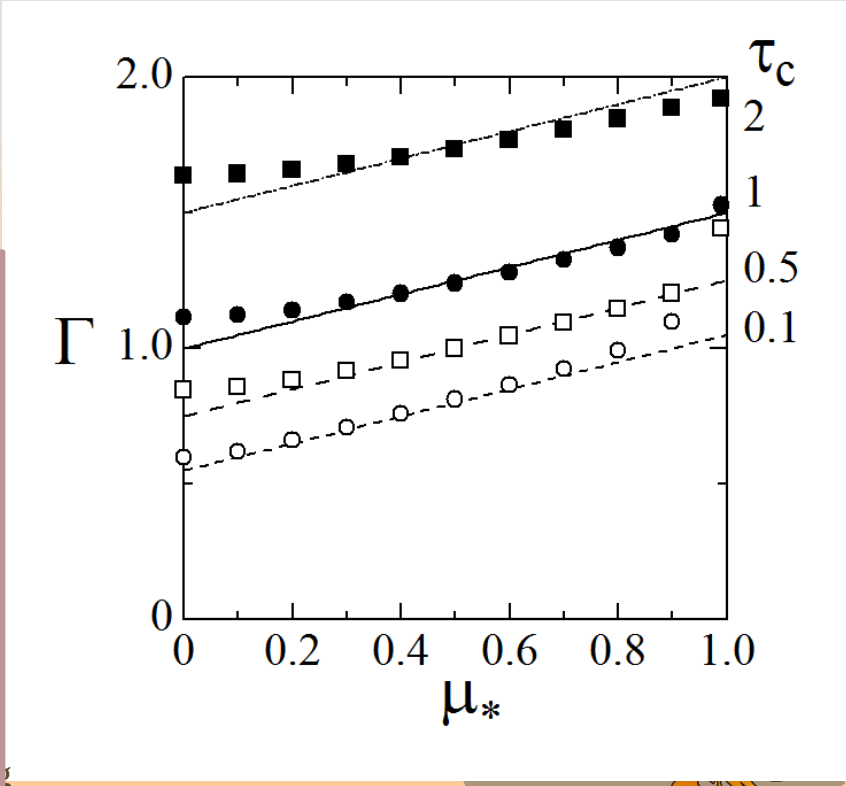
$$\Gamma \approx 1 \quad \tau_c \approx 1$$

$$\Gamma \approx \frac{\tau_c}{2} \quad \text{optically thick}$$

$$\Gamma = \frac{1 + \mu_*}{2} \quad \text{optically thin}$$

$$\Gamma = \frac{1 + \mu_* + \tau_c}{2}$$

層雲の光学的厚みが1程度なら古典的エディントン光度とほぼ一致する
光学的に厚い層雲では臨界条件は上がる
（超エディントン光度でも降着可能
→超大質量ブラックホール形成問題の解決）
光学的に薄い層雲だと臨界条件は下がる
（亜エディントン光度でも楽々吹き飛ばせる
→BALクェーサーやUFO問題の解決）





8 今後の問題、応用

- ❁ scattering only
 - thermal case
- ❁ isolated stratus
 - covering/overlapping
 - back scattering
- ❁ Newtonian
 - relativistic effect
 - terminal velocity
- ❁ Accretion
 - Supercritical accretion
 - SMBH formation
- ❁ Wind
 - BAL quasar
 - UFO
- ❁ Observational Properties
 - AGN
 - Sgr A*

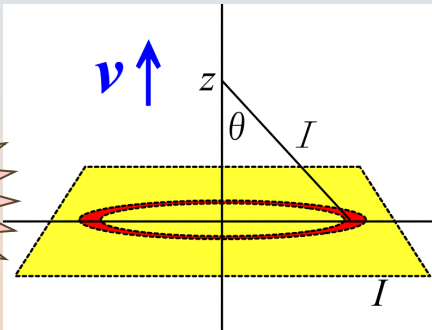




2. RRHD Eddington Factor

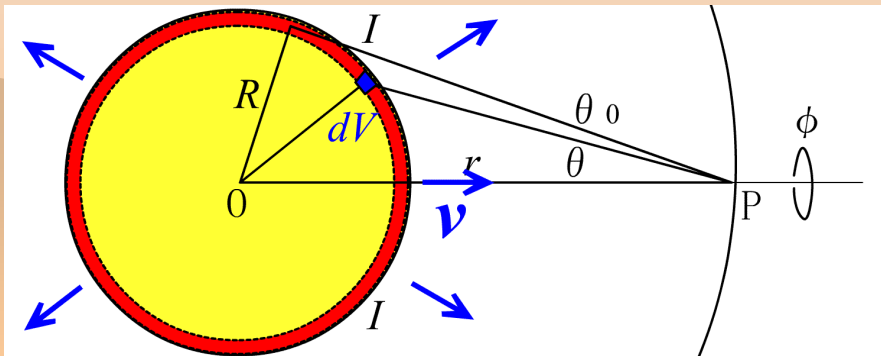
Eddington factor in an optically thin regime

plane-parallel



Moving

spherical



plane - parallel

$$f = \frac{P_0}{E_0}$$

spherical

$$f = \frac{P_0}{E_0}$$

