

目次

付録 B 付録	1
B.1 ポワソン方程式	1
B.1.1 重力場のラプラス方程式	1
B.1.2 重力場のポワソン方程式	2
B.2 ビリアル定理	5
B.2.1 ビリアル	5
B.2.2 粒子系のビリアル定理	6
B.2.3 ガス系のビリアル定理	9
B.3 赤方偏移	11
B.3.1 赤方偏移と青方偏移	11
B.3.2 赤方偏移の原因	12
B.4 シンクロトロン放射	17
B.4.1 サイクロトロン放射	17
B.4.2 シンクロトロン放射	22
B.5 コンプトン散乱	28
B.5.1 トムソン散乱	28
B.5.2 コンプトン散乱	30
B.5.3 逆コンプトン散乱	33
B.6 原子の離散スペクトル	36
B.6.1 原子の構造	36
B.6.2 量子条件とボーアモデル	37

付録B 付録

B.1 ポワソン方程式

物質が作る重力場において、重力加速度（単位質量あたりの重力） \mathbf{g} と重力ポテンシャル（単位質量あたりの重力エネルギー） ϕ の間には、 $\mathbf{g} = -\nabla\phi$ の関係がある。ここでは、重力ポテンシャル ϕ が満たす方程式—ラプラス方程式とポワソン方程式—について、簡単にまとめておこう。

B.1.1 重力場のラプラス方程式

原点に質量 M の質点があるとしよう。原点を中心とする直角座標を (x, y, z) 、球座標を (r, θ, φ) とする。このとき、動径距離 r は、 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ である。このような座標系で、重力加速度 \mathbf{g} の成分表示は以下ようになる：

$$\mathbf{g} = -GM \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -GM \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right). \quad (\text{B.1})$$

この重力加速度の発散（divergence），すなわち，

$$\text{div } \mathbf{g} = \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z} \quad (\text{B.2})$$

を考えてみよう。まず発散の x -成分を計算すると、原点以外では，

$$\frac{\partial g_x}{\partial x} = -GM \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) = -GM \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} \right) \quad (\text{B.3})$$

のようになる。他の成分も同様に計算すると，

$$\text{div } \mathbf{g} = \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{B.4})$$

となる．一方で，重力加速度 \mathbf{g} と重力ポテンシャル ϕ の間には，

$$\mathbf{g} = -\nabla\phi = \left(-\frac{\partial\phi}{\partial x}, -\frac{\partial\phi}{\partial y}, -\frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \quad (\text{B.5})$$

の関係があるので，結局，

$$-\text{div } \mathbf{g} = \nabla^2\phi = \Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{B.6})$$

が得られる．質点の作る重力場のポテンシャルに対して，質点のある原点以外で成り立つこの (B.6) 式を，重力場のラプラス方程式 (Laplace equation) と呼んでいる¹．

B.1.2 重力場のポワソン方程式

つぎに，ある領域にわたって，物質が密度 $\rho(\mathbf{r})$ で分布しているとしよう (図 B.1)．今度は，物質が分布している領域内部の点 P のポテンシャルを調べてみよう．

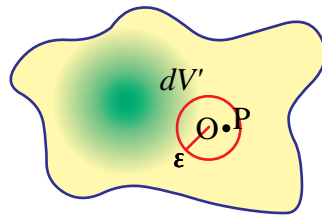


図 B.1: 広範囲に分布している物質と微小領域．

この点 P を含む半径が ε で体積が dV' の微小球を考えると，微小球内にある点 P のポテンシャル ϕ は，球の内部からの寄与分 ϕ_{in} と球の外部からの寄

¹記号 ∇ はナブラ (nabla) と呼ばれる．古代の竖琴 (nabla) に形が似ていることから付けられた．また記号 Δ はラプラシアン (Laplacian) と呼ばれる．マーフィ (R. Murphy) が最初に使用した．

与分 ϕ_{out} の和：

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_{\text{in}}(\mathbf{r}) + \phi_{\text{out}}(\mathbf{r}) \quad (\text{B.7})$$

とに分けられるだろう。このうち、球外からの寄与分については、点 P から見れば、質点の外部のポテンシャルと同じと見なせるので、ラプラス方程式より、

$$\nabla^2 \phi_{\text{out}}(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{B.8})$$

が成り立つ。したがって、球内からの寄与分のみ考えればよい。

さて、球内の物質が点 P に作るポテンシャルは、球内の物質に対して、

$$\phi_{\text{in}}(\mathbf{r}) = - \int_{\text{in}} \frac{G\rho(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (\text{B.9})$$

という積分を取ればよい。球の体積が十分に小さければ、その内部では密度は一定とみなせるので、密度 $\rho(\mathbf{r}')$ は点 P での密度 $\rho(\mathbf{r})$ に等しいとして、積分の外に出せるだろう。また、座標ベクトル \mathbf{r} と \mathbf{r}' に対して、適当な球座標 (r, θ, φ) と (r', θ', φ') を取ると、 $dV' = r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\varphi'$ および $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'}$ とできる。したがって、上の積分は、

$$\begin{aligned} \phi_{\text{in}}(\mathbf{r}) &= -G\rho(\mathbf{r}) \int_0^\varepsilon \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\varphi'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'}} \\ &= -2\pi G\rho(\mathbf{r}) \int_0^\varepsilon r'^2 dr' \int_0^\pi \frac{\sin \theta' d\theta'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'}} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

のように表せる。

ここで、 θ' に関する積分が、

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\sin \theta' d\theta'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'}} &= \frac{1}{rr'} \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'} \Big|_0^\pi \\ &= \begin{cases} \frac{2}{r} & r > r' \\ \frac{2}{r'} & r < r' \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

のように実行できるから、 r' まで含めた積分は、

$$\int_0^\varepsilon r'^2 dr' \int_0^\pi \frac{\sin \theta' d\theta'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'}} = \frac{2}{r} \int_0^r r'^2 dr' + \int_r^\varepsilon 2r' dr'$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{3}r^2 + \varepsilon^2 - r^2 \\
&= -\frac{1}{3}r^2 + \varepsilon^2 \quad (\text{B.12})
\end{aligned}$$

のようになる。球の半径 ε が十分小さければ、第2項の ε^2 の寄与は無視できるので、

$$\nabla^2 \phi_{\text{in}}(\mathbf{r}) = -2\pi G\rho(\mathbf{r})\nabla^2 \left(-\frac{1}{3}r^2 \right) \quad (\text{B.13})$$

となる（ここで ρ は一定とみなして微分の外に出した）。さらに、 $\nabla^2 r^2 = \nabla^2(x^2 + y^2 + z^2) = 6$ なので、結局、

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = \Delta \phi(\mathbf{r}) = 4\pi G\rho(\mathbf{r}) \quad (\text{B.14})$$

が得られる。物質が分布している領域で成り立つ (B.14) 式を重力場のポワソン方程式 (Poisson equation) と呼んでいる。

直角座標 (x, y, z) 、円筒座標 (r, φ, z) 、球座標 (r, θ, φ) に対して、具体的にポワソン方程式を書き下すと、それぞれ、以下ようになる：

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 4\pi G\rho(x, y, z), \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 4\pi G\rho(r, \varphi, z), \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 4\pi G\rho(r, \theta, \varphi). \quad (\text{B.17})$$

ところで、具体的なポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ が与えられていたとき、ポワソン方程式を用いて、ポテンシャルを微分することにより、そのポテンシャルを生み出す物質分布 $\rho(\mathbf{r})$ を導くことは可能だ。しかし、その逆に、具体的な物質分布 $\rho(\mathbf{r})$ がわかっていたとき、その物質分布が作るポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ を解析的に導くのは、微分方程式を積分しなければならないので、一般的には非常に難しい。物質が星のように球対称に分布している場合とか、やはり対称性の高い円盤状に分布している場合など、特殊な場合には解析的にポテンシャルが導けるが、一般的な場合には数値的に求める必要がある。

B.2 ビリアル定理

多数のガス粒子からなる星や、“星”という多数の“粒子”からなる球状星団や銀河、そして“銀河”という“粒子”からなる銀河団などでは、個々の粒子は動き回り位置やエネルギーを変動させるが、系全体としてはある種の平衡状態が達成されていることがある。このような多数の粒子からなるシステムにおいて、構成粒子の全運動エネルギーと系全体のポテンシャルエネルギーなどの間に成り立つ関係：ビリアル定理 (virial theorem)² を導いておこう。

B.2.1 ビリアル

構成粒子 (ガス粒子や星や銀河) の個々の質量を m_i とし、それぞれの位置ベクトルを \mathbf{r}_i とすると、力 \mathbf{F}_i を受けた各粒子は、運動方程式：

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i \quad (\text{B.18})$$

にしたがって動き回る (時間に関する微分は、 d/dt または $\dot{}$ で表す)。成分表示では、位置ベクトルを $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ 、力を $\mathbf{F}_i = (X_i, Y_i, Z_i)$ と置けば、以下のようなになる：

$$m_i \ddot{x}_i = X_i, \quad m_i \ddot{y}_i = Y_i, \quad m_i \ddot{z}_i = Z_i. \quad (\text{B.19})$$

さてここで、系の中心のまわりの慣性モーメント I を以下のように定義する：

$$I \equiv \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2). \quad (\text{B.20})$$

この慣性モーメントを時間に関して2回微分していくと、

$$\frac{dI}{dt} = 2 \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i, \quad (\text{B.21})$$

²ビリアル (virial) という言葉は普通は辞書にも出ていないが、人名ではなく、ラテン語で力を意味する vis (複数形 vires) に由来する言葉である。熱力学の創始者であるドイツの物理学者クラウジウス (R. J. E. Clausius ; 1822~1888) が、分子間に働く力のある種の関数を the virial of force と表したのが最初らしく、その後、今日的な使い方に変化していったようだ。

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 2 \sum_{i=1}^N (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i) \quad (\text{B.22})$$

のようになる。あるいは全体を2で割って、

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = \sum_{i=1}^N (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i) \quad (\text{B.23})$$

となる。この (B.23) 式の右辺に出てくる、位置ベクトルの時間微分 $\dot{\mathbf{r}}$ は速度ベクトル \mathbf{v} であり、時間に関する2階微分 $\ddot{\mathbf{r}}$ は加速度ベクトル \mathbf{a} なので、 $m_i \ddot{\mathbf{r}} = m_i \mathbf{a}_i$ が i 番目の粒子にかかる力 \mathbf{F}_i であることを考え合わせると、

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2 \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \quad (\text{B.24})$$

と書き直すことができる。

この (B.24) 式の右辺第1項、

$$T \equiv \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \quad (\text{B.25})$$

は、系の粒子の運動エネルギーの総和のちょうど2倍である。また右辺第2項、

$$V \equiv \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^N (x_i X_i + y_i Y_i + z_i Z_i) \quad (\text{B.26})$$

はクラウジウスのポテンシャルと呼ばれる。

B.2.2 粒子系のポテンシャル定理

まず、構成粒子同士が重力相互作用しかしない質点系（粒子系）でのポテンシャル定理を導いてみよう。すなわち、(B.24) 式右辺の第2項あるいはポテンシャル (B.26) について、重力相互作用を丁寧に考慮してみる。

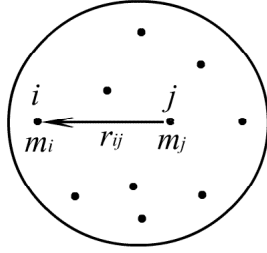


図 B.2: 重力相互作用をする粒子系.

図 B.2 のように, i 番目の粒子の質量を m_i , j 番目の粒子の質量を m_j とし, 粒子間の距離を r_{ij} としよう. このとき, 粒子 j から粒子 i へ働く力 \mathbf{F}_{ij} の成分 (X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij}) は,

$$X_{ij} = -\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^2} \frac{(x_i - x_j)}{r_{ij}}, \quad Y_{ij} = -\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^2} \frac{(y_i - y_j)}{r_{ij}}, \quad Z_{ij} = -\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^2} \frac{(z_i - z_j)}{r_{ij}} \quad (\text{B.27})$$

となり, このビリアルは, $x_i X_{ij} + y_i Y_{ij} + z_i Z_{ij}$ である. 逆に, 粒子 i から粒子 j へ働く力の成分は, 対称性から, $(-X_{ij}, -Y_{ij}, -Z_{ij})$ であり, ビリアルは, $-x_j X_{ij} - y_j Y_{ij} - z_j Z_{ij}$ となる.

したがって, 両方を合わせたビリアルとして,

$$\begin{aligned} v &= (x_i - x_j)X_{ij} + (y_i - y_j)Y_{ij} + (z_i - z_j)Z_{ij} \\ &= -\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^2} \frac{(x_i - x_j)^2}{r_{ij}} - \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^2} \frac{(y_i - y_j)^2}{r_{ij}} - \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^2} \frac{(z_i - z_j)^2}{r_{ij}} \\ &= -\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}} \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

が得られる. さらにすべての粒子についての和を取って (ただし重複して数えないように, $i > j$ の範囲で和を取る), 系の総ビリアルは,

$$V = -\sum_{i>j}^N \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}} = \Omega \quad (\text{系のポテンシャルエネルギー}) \quad (\text{B.29})$$

となるが、これは系の重力ポテンシャルエネルギーにほかならない³。

以上より、(B.24) 式は、 T （系の構成粒子の運動エネルギーの総和）と Ω （系のポテンシャルエネルギー）とを用いて、結局、

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2T + \Omega \quad (\text{B.30})$$

とまとめられる。さらにもし、個々の構成粒子は運動していても、系全体としては時間的に定常で巨視的な状態の変化がなく、慣性モーメントも一定ならば、 $d^2 I/dt^2 = 0$ なので、

$$2T + \Omega = 0 \quad (\text{B.31})$$

が成り立つ。これをビリアル定理（Virial Theorem）と呼んでいる。

一方、よく知られた力学的エネルギーの保存則からは、

$$T + \Omega = E \quad (\text{一定}) \quad (\text{B.32})$$

が成り立つ。球状星団や銀河団のように、システムが重力的に束縛されていたら、系の全エネルギー E は負である。

³ベクトルのままで導出することもできる。すなわち、 i 番目の粒子にかかる重力 \mathbf{F}_i は、他のすべての粒子から働く重力の総和なので、

$$\mathbf{F}_i = - \sum_{j=1, (j \neq i)}^N \frac{Gm_i m_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}$$

のように表される。したがって (B.24) 式右辺の第 2 項は、以下のように変形される：

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i &= - \sum_{i=1}^N \left[\sum_{j=1, (j \neq i)}^N \frac{Gm_i m_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} \right] \cdot \mathbf{r}_i \\ &= - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{Gm_i m_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} \\ &= - \sum_{i>j}^N \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \\ &\equiv \Omega \quad (\text{系のポテンシャルエネルギー}). \end{aligned}$$

エネルギー保存の法則 (B.32) とビリアル定理 (B.31) から、重力的に束縛され、かつ、平衡状態にある系に対しては、

$$T = -E, \quad (\text{B.33})$$

$$\Omega = 2E \quad (\text{B.34})$$

となることがわかる。

たとえば、系（球状星団や銀河団）の全質量を M とし、構成粒子（星や銀河）の平均速度を \bar{v} とすると、全運動エネルギーは、

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} M \bar{v}^2 \quad (\text{B.35})$$

となる。一方、系の半径を R とすると、系のポテンシャルエネルギーは、

$$\Omega = -\frac{GM^2}{R} \quad (\text{B.36})$$

ほどである。この場合、ビリアル定理からは、

$$\bar{v}^2 = \frac{GM}{R} \quad (\text{B.37})$$

であることがわかり、またエネルギー保存則からは、

$$E = \frac{1}{2} \Omega = -\frac{GM^2}{2R} \quad (\text{B.38})$$

であることがわかる。

B.2.3 ガス系のビリアル定理

つぎに、熱運動をして内部エネルギーをもっているガス系のビリアル定理を導いてみよう。図 B.2 のように、質量 m_H のガス粒子が N 個集まった、質量 $M = m_H N$ のガス体を考える。

ガスの温度を T_{gas} とし、ボルツマン定数を k とすると、粒子 1 個の熱運動エネルギーは $(3/2)kT_{\text{gas}}$ で表される。したがって、 N 個の系全体の熱運動エネルギーは、

$$T = \frac{3}{2} k T_{\text{gas}} N \quad (\text{B.39})$$

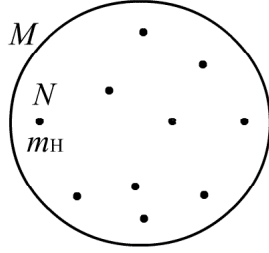


図 B.3: 熱運動しているガス系.

となる. 一方, 定積比熱を c_V とし, 比熱比を γ とすると, 単位質量あたりの内部エネルギーは, $c_V T_{\text{gas}} = \mathcal{R}_g T / (\gamma - 1)$ で表される. したがって, 系全体の内部エネルギーは,

$$U = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{k T_{\text{gas}}}{m_H} M \quad (\text{B.40})$$

となる ($\mathcal{R}_g = k/m_H$ を使った).

(B.39) 式と (B.40) 式を比較し, $M = m_H N$ を使うと, 結局, ガス系では,

$$T = \frac{3}{2}(\gamma - 1)U \quad (\text{B.41})$$

が成り立っていることがわかる. したがって, 粒子系のビリアル定理 (B.31) は, ガス系では,

$$3(\gamma - 1)U + \Omega = 0 \quad (\text{B.42})$$

と読み替えることができる.

一方, ガス系でのエネルギー保存則は,

$$U + \Omega = E \text{ (一定)} \quad (\text{B.43})$$

である. ガス系のビリアル定理 (B.42) と組み合わせると,

$$E = U + \Omega = -(3\gamma - 4)U = \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)}\Omega \quad (\text{B.44})$$

と表せることがわかる.

星の安定性などもビリアル定理で議論できるが, ここでは省略する.

B.3 赤方偏移

はるばると星の海を越えて渡ってきたわずかな光を調べることにより、われわれは彼方の天体についてさまざまな情報を得ることができる。温度や密度などの物理量、元素の組成、天体の運動状態、さらには時空の性質などなどだ。ここでは、スペクトルの偏移、すなわち光の波長（あるいは振動数）のずれから、ということがわかるのかを概説しておこう。

B.3.1 赤方偏移と青方偏移

天体からのスペクトル線を同定した時に、観測される波長 λ (振動数 ν) と、地球上の実験室内で同じ原子から出てくる光のスペクトル線の波長 λ_0 (振動数 ν_0) はしばしば異なっている。これをスペクトル線が偏移 (shift) しているという。

たとえば 3C 273 というクエーサー (quasar: きわめて遠方の活動的な銀河) のスペクトル (本文, 図 11.6) を見て欲しい。水素バルマー線の一つ $H\alpha$ 線の実験室における波長は 656.3 nm であるが、クエーサー 3C 273 のスペクトル上では、 $H\alpha$ 線は 760.0 nm の波長に位置している。すなわち 3C 273 では $H\alpha$ 線が 656.3 nm から 760.0 nm に偏移しているわけだ。

このようなスペクトル線の偏移の大きさを表す量として、観測される波長 λ と実験室で測定された波長 λ_0 の比から 1 を引いたもの (あるいは偏移の大きさ $\lambda - \lambda_0$ を実験室の波長で割ったもの)

$$z = \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\nu_0}{\nu} - 1 \quad (\text{B.45})$$

を用い、赤方偏移 z と呼んでいる。

すぐわかるように λ と λ_0 が等しければ z はゼロである。もし λ が λ_0 より大きいすなわち波長が長い方へずれていけば、 z は正になり (狭い意味での) 赤方偏移 (redshift) と呼ばれる。可視光の場合、波長が長い光は赤い光であり、これが赤方偏移という呼び名の由来である。逆に波長が短い (青い) 方へずれていけば、 z は負であり、青方偏移 (blue shift) と呼ばれる。一般には両方を併せて広い意味で赤方偏移と総称して使用する。

B.3.2 赤方偏移の原因

スペクトル線の偏移を起こす原因は大きく3つに分けられる。

- 特殊相対論的ドップラー偏移。すなわち天体と地球との間に相対的な運動がある場合。
- 一般相対論的な重力場中での偏移。すなわち時空が重力場のために歪んでいる場合。
- やはり一般相対論的なものだが宇宙論的な赤方偏移。すなわち宇宙が膨張しているため。

以下これらを順にみていこう。

(1) 運動学的赤方偏移（ドップラー偏移）

物体の運動が光速近くになると、時間や空間は絶対的なものではなくなり、物体の速度に依存して変化する。不変なのは光の速度だけである。アインシュタインが1905年に打ち立てた特殊相対論（特殊相対性理論）は、現在では広く実証され、天体物理学においてもいくつかの現象を理解するためには欠かせないものとなっている。

この特殊相対論によると、光源と観測者との間に相対的な運動がある場合、光速が有限であることと光源の時間と観測者の時間の長さが異なってくるためによって、光源自体の時間（光源の固有時間）で測定した光の振動数と観測者が自分の固有時間で測定した振動数が違ってくる。この特殊相対論的ドップラー効果（Doppler effect）による偏移を図B.4を参照にしながら考えてみよう。

図B.4のように、観測者から光源に向かって引いた直線から θ の方向へ、速度 v で光源が運動しているとする。この時、光源の速度の視線方向へ投影した成分 $v \cos \theta$ を視線速度（radial velocity）と呼ぶ。角度 θ は、光源が手前に近付いている場合、視線速度が負になるようにとってある。

さて光源が自分の固有時間で計って τ の間に n 個の光波を出したとしよう。光速を c とすると、波列の全体の長さは $c\tau$ だから、光源における波長は

$$\lambda_0 = \frac{c\tau}{n} \quad (\text{B.46})$$

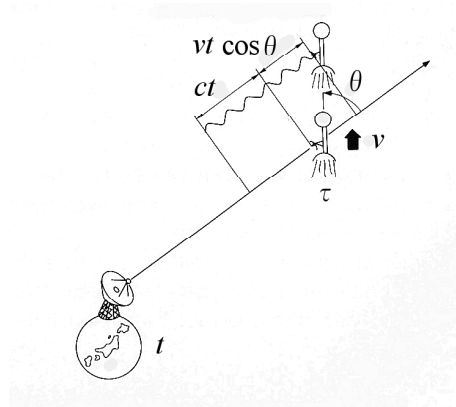


図 B.4: 光源の運動と波長の変化.

である．一方，受け取る側で考えると，観測者の固有時間 t で見た時，波が出る間に光源が速度 v で移動するために，波列の長さは $ct + vt \cos \theta$ となる．受け取る波の数自体は変わらないから，結局観測者の波長は，

$$\lambda = \frac{ct + vt \cos \theta}{n} \quad (\text{B.47})$$

になる．上の (B.47) 式を (B.46) 式で辺々割ると，

$$1 + z = \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{t}{\tau} (1 + \beta \cos \theta) \quad (\text{B.48})$$

が得られる．ただし $\beta = v/c$ を用いた．(B.48) 式は， (t/τ) を別にすれば，光の速度が有限であるということから導かれたものだ．

さらに特殊相対論において，運動している物体の時間が伸びるということを考慮すれば，

$$t = \gamma \tau = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\text{B.49})$$

となるので，結局，以下の赤方偏移の式が得られる (図 B.5) :

$$1 + z = \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{\nu_0}{\nu} = \frac{1 + \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (\text{B.50})$$

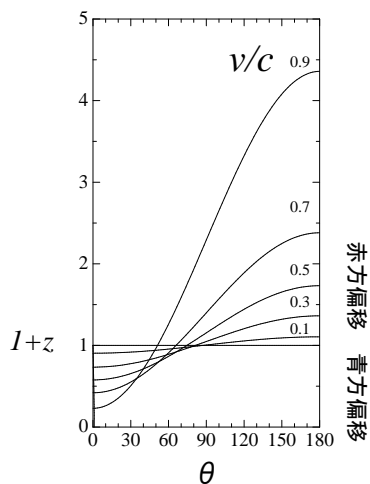


図 B.5: いろいろな速度 v/c や角度 θ に対する赤方偏移 z .

光源が観測者から反対方向に動いているとき ($\theta = 0$),

$$\frac{v}{c} = \frac{2z + z^2}{2 + 2z + z^2} \quad (\text{B.51})$$

という関係が得られる. また速度 v が光速 c に比べて小さいときには, (B.50) 式から赤方偏移 z は近似的に, 以下のように表される:

$$z = \frac{v \cos \theta}{c}. \quad (\text{B.52})$$

(2) 重力場による赤方偏移

アインシュタインの天才は, 特殊相対論だけではおさまらず, その10年後, 重力まで含めた時空間の理論: 一般相対論 (一般相対性理論) を作り上げてしまった. 宇宙の構造, ブラックホール, 中性子星, 白色矮星などでは, 一般相対論を考慮しなければならない.

一般相対論では大きな質量の近傍にいる人の時計は, 遠方の人の時計より進み方が遅くなる. たとえば質量 M の球対称の天体から距離 r の場所で静止し

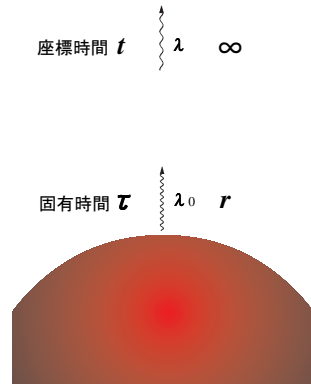


図 B.6: 重力赤方偏移.

ている人の固有時間 τ は、無限の遠方にいる人の固有時間 t (座標時間) と、

$$\tau = t \times \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}, \quad r_S = \frac{2GM}{c^2} \quad (\text{B.53})$$

で関係づけられている (図 B.6). ただし r_S ($= 2GM/c^2$) はシュバルツシルト半径 (Schwarzschild radius) である.

天体の近くから ($\tau =$) 1 秒間に 100 回振動する光信号, すなわち 100 Hz の光が発射されたとしよう. 遠方の観測者も当然 100 回の振動を記録するが, 時間の違いのためにそれを ($t =$) 2 秒も 3 秒もかけて受け取ることになる. すなわち振動数は小さくなり波長は長くなる. これが重力場による赤方偏移 (gravitational redshift) で, 式で表せば, 以下のようになる:

$$1 + z = \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{\nu_0}{\nu} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_S}{r}}}. \quad (\text{B.54})$$

X線バースター (中性子星表面の核爆発) でのスペクトルには, 4.1 keV のところに吸収線が見つかったが, これは実験室系では 6.7 keV の FeXXV の吸収線だと考えられている. 赤方偏移 z を計算してみるといいだろう.

(3) 宇宙論的赤方偏移

一般相対論的な膨張宇宙論では、宇宙のスケールファクター a は時間と共に増加する。宇宙膨張に伴って時間間隔が変化するので（光速度が不変なことから、物差しの長さが変わるとしても宵）、やはり赤方偏移が起きる。これを宇宙論的赤方偏移（cosmological redshift）と呼ぶ。波長 λ_0 の光が発射されたときの宇宙の大きさを $a(\tau)$ 、波長 λ の光を受け取った現在の宇宙の大きさを $a(t)$ とすると、赤方偏移は以下となる：

$$1 + z = \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{\nu_0}{\nu} = \frac{a(t)}{a(\tau)}. \quad (\text{B.55})$$

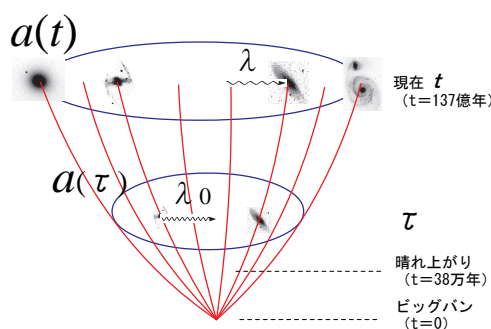


図 B.7: 宇宙論的赤方偏移。

$t - \tau$ が小さいときは、 $a(\tau)$ を $t - \tau$ で展開して (B.55) 式を、

$$1 + z = 1 + \frac{da(t)/dt}{a(t)}(t - \tau) \quad (\text{B.56})$$

と近似できる。さらに $(da/dt)/a = H$ 、 $(t - \tau) = r/c$ とおけば、いわゆるハッブルの法則が得られる：

$$z = \frac{H}{c} r. \quad (\text{B.57})$$

B.4 シンクロトロン放射

ここでは、磁場中を運動する荷電粒子の放射に関して、粒子のエネルギーが低いときの（非相対論的な）サイクロトロン放射と、粒子のエネルギーが高いときの（相対論的な）シンクロトロン放射の概要をまとめておく。

B.4.1 サイクロトロン放射

電子やイオンなどの荷電粒子が磁場中を運動しているとき、荷電粒子は磁場から力を受けて軌道が曲がる（図 B.8）。荷電粒子が運動するのは電流が流れることと同じなので、導線に電流を流したら磁石から力を受けるように、運動する荷電粒子も磁場から力を受けるのだ。これがローレンツ力（Lorentz force）である。またローレンツ力を受けながら磁場中を運動する荷電粒子から放射される電磁放射をサイクロトロン放射（cyclotron radiation）⁴と呼ぶ。

(1) サイクロトロン運動

ローレンツ力は荷電粒子の運動方向と磁場の方向のなす面に垂直方向に働き、速度の大きさや磁場の大きさや電荷の大きさに比例する。荷電粒子の質量を m 、電荷を q 、速度ベクトルを \mathbf{v} 、磁場ベクトル（磁束ベクトル）を \mathbf{B} とすると、荷電粒子の運動方程式は、

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (\text{B.58})$$

で表される。ただしここで、 c は光速である。

速度ベクトル \mathbf{v} を磁場に平行な成分 \mathbf{v}_{\parallel} と磁場に垂直な成分 \mathbf{v}_{\perp} にわけると ($\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$)、磁場に平行な速度と磁場の外積は 0 になるので、上の運動方程式 (B.58) は、

$$\frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt} = 0, \quad (\text{B.59})$$

$$\frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = \frac{q}{mc} \mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B} \quad (\text{B.60})$$

⁴サイクロトロン放射の名前は、磁場を利用して荷電粒子を円運動させながら加速するサイクロトロン加速器の名前にちなんでいる。本文にあるように、荷電粒子の速度が変わってもサイクロトロン運動の周期は一定なので、サイクロトロン加速器では一定周期で磁場をかけることによって、荷電粒子を加速する。

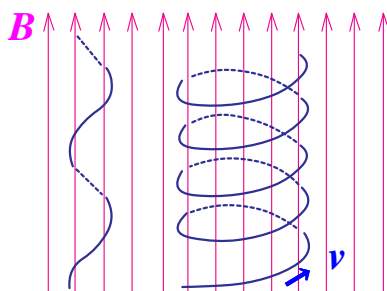


図 B.8: 磁場中を運動する荷電粒子.

のように分解できる. すなわち, 磁力線に対して荷電粒子が斜めに飛び込んできた場合, (B.59) 式から, 磁場に平行な方向には等速直線運動をする. 一方, (B.60) 式から, 磁場に垂直な面内では円運動を行う (図 B.9). それらを合わせると, 全体としては, 磁場のまわりを巻き付くような螺旋運動になる. さてこの磁場に垂直な面内での円運動 (サイクロトロン運動) において, 円運動の半径を r , 回転速度を v_{\perp} ($= |\mathbf{v}_{\perp}|$), 回転角速度を ω ($= v_{\perp}/r$) とすると, ローレンツ力と遠心力の釣り合いから, 電子の場合 ($m = m_e$, $q = -e$),

$$m_e r \omega^2 = m_e \frac{v_{\perp}^2}{r} = \frac{e}{c} v_{\perp} B \quad (\text{B.61})$$

が成り立つ.

この (B.61) 式より, 回転運動の半径は,

$$r = r_L \equiv \frac{m_e c v_{\perp}}{e B} = 5.69 \times 10^{-8} \frac{v_{\perp}}{\text{cm s}^{-1}} \frac{\text{gauss}}{B} \text{ cm} \quad (\text{B.62})$$

と表されるが, これをラーモア半径/旋回半径 (Larmor radius/gyro radius) と呼ぶ. ラーモア半径は荷電粒子の速度に比例し磁場の強さに反比例する. 一方, 回転の角速度は,

$$\omega = \omega_L \equiv \frac{e B}{m_e c} = 1.76 \times 10^7 \frac{B}{\text{gauss}} \text{ rad s}^{-1} \quad (\text{B.63})$$

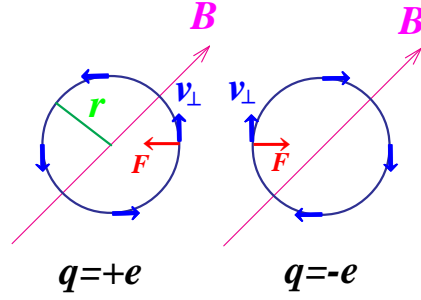


図 B.9: 磁場に垂直な面内での荷電粒子の運動. 電荷が正の場合には左回りの運動になり (左), 電荷が負の場合には右回りの運動になる (右).

となり, これをサイクロトロン振動数 (cyclotron frequency) と呼ぶ. サイクロトロン振動数は, 磁場の強さに比例して高くなるが, 荷電粒子の速度には関係ない. すなわち, 荷電粒子の速度 (エネルギー) が変化しても, サイクロトロン運動の半径が変化するだけで, 周期 $P (= 2\pi/\omega_L = 2\pi m_e/eB)$ は一定である. また単位時間あたりの振動数は, 以下のようになる:

$$\nu = \nu_L \equiv \frac{\omega_L}{2\pi} = \frac{eB}{2\pi m_e c} = 2.80 \times 10^6 \frac{B}{\text{gauss}} \text{ Hz} \quad (\text{B.64})$$

たとえば, 荷電粒子が電子の場合, 質量 m を電子質量 $m_e (= 9.1094 \times 10^{-28} \text{ g})$, 電荷 q を素電荷 $e (= 4.8032 \times 10^{-10} \text{ esu})$, 速度 v を光速 $c (= 3.0 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1})$ 程度, 磁場の強さ B を 1gauss としよう. このときの, ラーモア半径は約 17 m, サイクロトロン振動数は約 $1.76 \times 10^7 \text{ rad/s}$, 単位時間あたりの振動数は約 2.8 MHz となる.

さらに, 磁場の方向を z 軸とする直角座標系 (x, y, z) で, (B.60) 式は,

$$\frac{dv_x}{dt} = \omega_L v_y, \quad \frac{dv_y}{dt} = -\omega_L v_x, \quad \frac{dv_z}{dt} = 0 \quad (\text{B.65})$$

と表される. またこれらの方程式の解は, 以下のようになる:

$$v_x = v_{\perp} \cos(\omega_L t + \alpha), \quad v_y = -v_{\perp} \sin(\omega_L t + \alpha), \quad v_z = v_{\parallel}, \quad (\text{B.66})$$

$$x = x_0 + r_L \sin(\omega_L + \alpha), \quad y = y_0 + r_L \cos(\omega_L + \alpha), \quad z = z_0 + v_{\parallel} t. \quad (\text{B.67})$$

さて、荷電粒子の周囲には静電場が存在している。荷電粒子が等速直線運動しているときには、周囲の静電場も一緒に移動する。しかし荷電粒子が加速運動をすると、周囲の静電場の一部はその動きについていけずに振り飛ばされる。すなわち、電磁波として放射されることになる。

ところで円運動は、速度の大きさは変わらないが方向は変わるので、やはり加速運動になっている。したがって、磁場の中をサイクロトロン振動数で螺旋運動する荷電粒子も、電磁波を放射する。これがサイクロトロン放射である。

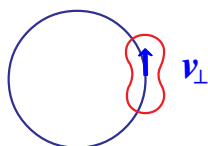


図 B.10: サイクロトロン放射の角分布.

(2) サイクロトロン放射の角分布

サイクロトロン放射はどの方向にも一様な強さで放出されるわけではなく、荷電粒子の運動方向に対して、方向による依存性がある (図 B.10)。具体的には、進行方向から測った角度 θ に対して、 $d\Omega$ の立体角内に放射される単位時間あたりの放射エネルギーは、

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^4 B^2 v_{\perp}^2}{8\pi m^2 c^5} (1 + \cos^2 \theta) \quad (\text{B.68})$$

のように表される。

(3) サイクロトロン放射の放射率

いろいろな方向に放射されるサイクロトロン放射をすべて足し合わせたものが、サイクロトロン放射の放射率 (power)、すなわち単位時間あたりの放

射エネルギーである。

サイクロトロン放射の放射エネルギーの角分布 (B.68) 式を,

$$P = \int \frac{dP}{d\Omega} d\Omega = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{dP}{d\Omega} \sin\theta d\theta d\varphi \quad (\text{B.69})$$

のように積分すると, 放射率が得られる. 電子の場合は,

$$P = \frac{2e^4 B^2 v_\perp^2}{3m_e^2 c^5} = 1.58 \times 10^{-15} \left(\frac{B}{\text{gauss}} \right)^2 \left(\frac{v_\perp}{c} \right)^2 \text{ erg s}^{-1} \quad (\text{B.70})$$

のように表される.

(4) サイクロトロン放射のスペクトル

最後に, このようなサイクロトロン放射は, 基本的にはサイクロトロン振動数で放射されるが, サイクロトロン振動数の倍振動なども放射される. ただし高次 (n 次) の放射は $(v/c)^{2n}$ に比例して弱くなる. したがって, サイクロトロン放射のスペクトルは, 基本振動や倍振動からなる離散的なもの, すなわち線スペクトルになる (図 B.11).

このようなサイクロトロン放射の特徴的なスペクトルは, たとえば, 磁場をもった中性子星などで検出されており, 磁場の強さなどを評価するのに利用されている.

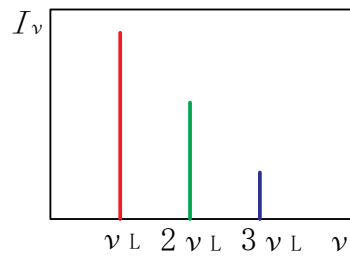


図 B.11: サイクロトロン放射のスペクトル (1 粒子).

B.4.2 シンクロトロン放射

磁場中を運動する荷電粒子のエネルギーが大きくなり、運動速度が光速に近くなると、荷電粒子の運動は相対論的になって、サイクロトロン放射も相対論的な効果を受けるようになる。このような高エネルギー荷電粒子から放射される“相対論的サイクロトロン放射”をシンクロトロン放射 (synchrotron radiation)⁵と呼ぶ (図 B.12)。

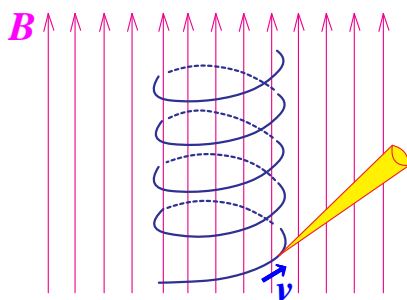


図 B.12: 磁場中を高速運動する荷電粒子。

(1) シンクロトロン運動

磁場中を高速で運動する相対論的荷電粒子の運動方程式は、荷電粒子の質量を m 、電荷を q 、速度ベクトルを \mathbf{v} 、磁場ベクトル (磁束ベクトル) を \mathbf{B} とすると、

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \mathbf{v}) = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (\text{B.71})$$

で表される。ただしここで、 γ は相対論的な効果を示すローレンツ因子 (Lorentz factor) で、粒子の速度の大きさ v ($= |\mathbf{v}|$) を用いて、

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (\text{B.72})$$

⁵シンクロトロン放射の名前は、磁場を利用して高エネルギー荷電粒子を高速円運動させながら加速するシンクロトロン加速器の名前にちなんでいる。シンクロトロン運動では、磁場が一定で荷電粒子のエネルギーが変化すると回転周期も変わってしまうが、磁場の強さも同時に変えることによって回転周期が一定になるように、磁場をシンクロさせながら、荷電粒子を加速する。

のように表される。粒子の速度が光速に比べて十分に小さければ、このローレンツ因子はほぼ1だが、光速に比べて無視できなくなると、ローレンツ因子は1より大きくなる。そのような亜光速の領域では、粒子は、その質量が、 γm のように重くなったように振る舞うので、加速がだんだん難しくなる。

サイクロトロン放射と同じように、速度ベクトル \mathbf{v} を磁場に平行な成分 \mathbf{v}_{\parallel} と磁場に垂直な成分 \mathbf{v}_{\perp} にわけよう ($\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$)。磁場に平行な速度と磁場の外積は0になり、円運動では速度の大きさ v は変化しないのでローレンツ因子を微分の前に出すことができ、上の運動方程式 (B.71) は、

$$\frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt} = 0, \quad (\text{B.73})$$

$$\frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = \frac{q}{\gamma mc} \mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B} \quad (\text{B.74})$$

のように分解することができる。高エネルギー粒子の場合も、荷電粒子は磁場に垂直な面内では円運動を行うが、速度の増加と共に質量が重くなるように振る舞うので、回転運動の性質は速度に依存して変化することになる。

すなわち、高エネルギー荷電粒子の磁場に垂直な面内での円運動（シンクロトロン運動）において、円運動の半径を r 、回転速度を v_{\perp} ($= |\mathbf{v}_{\perp}|$)、回転角速度を ω ($= v_{\perp}/r$) とすると、ローレンツ力と遠心力の釣り合いから、電子の場合 ($m = m_e$, $q = -e$)、

$$\gamma m_e r \omega^2 = \gamma m_e \frac{v_{\perp}^2}{r} = \frac{e}{c} v_{\perp} B \quad (\text{B.75})$$

が成り立つ。

この (B.75) 式より、シンクロトロン運動のラーモア半径は、

$$r = r_B \equiv \frac{\gamma m_e c v_{\perp}}{e B} = 5.69 \times 10^{-8} \frac{v_{\perp}}{\text{cm s}^{-1}} \frac{\text{gauss}}{B} \gamma \text{ cm} \quad (\text{B.76})$$

となる。すなわち、サイクロトロン運動のラーモア半径に比べて、シンクロトロン運動のラーモア半径は γ 倍になっている。一方、シンクロトロン運動の回転の角速度は、

$$\omega = \omega_B \equiv \frac{e B}{\gamma m_e c} = 1.76 \times 10^7 \frac{B}{\text{gauss}} \frac{1}{\gamma} \text{ rad s}^{-1} \quad (\text{B.77})$$

となる．こちらは，非相対論的なサイクロトロン振動数と比べて， $1/\gamma$ 倍になっている．また単位時間あたりの振動数は，以下のようになる：

$$\nu = \nu_B \equiv \frac{\omega_B}{2\pi} = \frac{eB}{2\pi\gamma m_e c} = 2.80 \times 10^6 \frac{B}{\text{gauss}} \frac{1}{\gamma} \text{ Hz} \quad (\text{B.78})$$

(2) シンクロトロン放射の角分布

シンクロトロン放射における相対論的な効果の一つは，電磁放射の方向分布が大きく偏ることだ (図 B.13)．荷電粒子のシステム (運動系) では，電磁波は荷電粒子の前後に同じように放射されているのだが，観測者のシステム (静止系) では，相対論的な効果のために，荷電粒子の運動方向前方に非常に強く偏った分布になってしまう．静止系から見たときの放射方向は，電子の運動方向から測って，

$$\theta \sim 1/\gamma \quad (\text{B.79})$$

の角内に集中的に放出される．

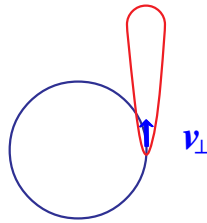


図 B.13: シンクロトロン放射の角分布.

(3) シンクロトロン放射の放射率

いろいろな方向に放射されるシンクロトロン放射をすべて足し合わせたものが，シンクロトロン放射の放射率 (power)，すなわち単位時間あたりの放射エネルギーである．シンクロトロン放射の放射率は，サイクロトロン放射

の放射率に γ^2 が掛かったものとなる：

$$P = \frac{2e^4 B^2 \gamma^2 v_{\perp}^2}{3c^5 m_e^2} = 1.58 \times 10^{-15} \left(\frac{B}{\text{gauss}} \right)^2 \left(\frac{v_{\perp}}{c} \right)^2 \gamma^2 \text{ erg s}^{-1}. \quad (\text{B.80})$$

荷電粒子（いまの場合は電子）の運動が等方的に分布しているとする、磁場の方向と速度ベクトルのなす角度 α を用いて、磁場に垂直な方向の成分 v_{\perp} は、 $v_{\perp} = v \sin \alpha$ となる。そこで多数の粒子について角度方向の平均を取ると、

$$\langle v_{\perp} \rangle^2 = \frac{1}{4\pi} \int v^2 \sin^2 \alpha d\Omega = \frac{2}{3} v^2 \quad (\text{B.81})$$

となり、上の (B.80) 式は、以下のようになる：

$$P = \frac{4e^4}{9c^3 m_e^2} B^2 \left(\frac{v}{c} \right)^2 \gamma^2 = 1.1 \times 10^{-15} \left(\frac{B}{\text{gauss}} \right)^2 \left(\frac{v}{c} \right)^2 \gamma^2 \text{ erg s}^{-1}. \quad (\text{B.82})$$

さらにここで、電子のトムソン散乱の断面積：

$$\sigma_{\text{T}} \equiv \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 = 6.6520 \times 10^{-25} \text{ cm}^2 \quad (\text{B.83})$$

と、磁場のエネルギー密度：

$$U_{\text{mag}} \equiv \frac{B^2}{8\pi} \quad (\text{B.84})$$

を導入し、さらに速度がほぼ光速であることを使うと、(B.82) 式は、

$$P = \frac{4}{3} \sigma_{\text{T}} c \gamma^2 U_{\text{mag}} \quad (\text{B.85})$$

のように表される。この (B.85) 式の放射率の形は、付録 B.5.3 で述べる逆コンプトン散乱の放射率の形と類似している点に注意しておく。

なお、ローレンツ因子が γ の電子のエネルギーは、

$$E = \gamma m_e c^2 \quad (\text{B.86})$$

なので、シンクロトロン放射によって電子のエネルギーが減少するタイムスケールは、以下ぐらいになる：

$$t_{\text{syn}} \equiv \frac{\gamma m_e c^2}{P} \sim 7.8 \times 10^8 \left(\frac{B}{\text{gauss}} \right)^{-2} \frac{1}{\gamma} \text{ s}. \quad (\text{B.87})$$

(4) シンクロトロン放射のスペクトル

最後に、1個の荷電粒子から放射されるシンクロトロン放射のスペクトルだが、粒子の速度が次第に大きくなってサイクロトロン放射が相対論的になっていくと、最初のうちは、サイクロトロン放射のように、基本振動とその倍振動からなる離散的なスペクトルが放射される (図 B.14 左)。ただし、基本振動の振動数は (B.78) 式の $\nu_B = \nu_L/\gamma$ で、サイクロトロン放射の場合の $1/\gamma$ であり、また粒子の速度が大きくなると、高次放射も無視できなくなる。

さらに粒子の速度が光速に近くなってくると、基本振動の振動数は非常に小さくなり、倍振動の間隔も非常に狭くなって、さらにいろいろな原因で線スペクトルの幅が広がっていくので、それらの線スペクトルが重なり合い、連続的なスペクトルに移行する (図 B.14 右)。

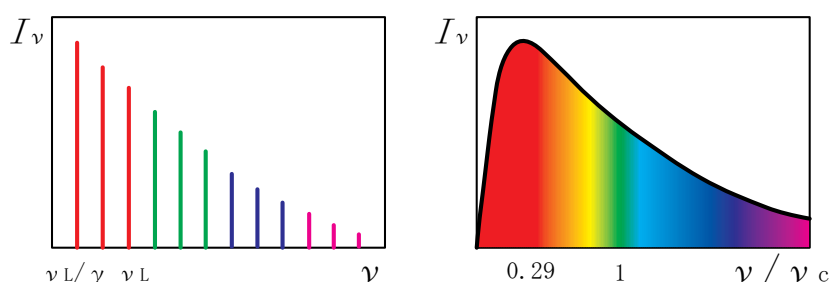


図 B.14: シンクロトロン放射のスペクトル (1 粒子)。

1 個の粒子から放射されるシンクロトロン放射スペクトルは、臨界振動数：

$$\nu_c = \frac{3}{2}\nu_L\gamma^2 = \frac{3}{2}\nu_B\gamma^3 = \frac{3eB}{4\pi mc}\gamma^2 \sim \frac{m_e}{m} \frac{B}{\text{gauss}} \gamma^2 \text{ MHz} \quad (\text{B.88})$$

を中心として、 $0.29\nu_c$ にピークをもち、高振動数側に裾を引いた特徴的なものになる。粒子のエネルギーを使って書き直すと、臨界振動数は、

$$\nu_c \sim 6.27 \times 10^{12} \frac{m_e}{m} \frac{B}{\text{gauss}} \left(\frac{E}{\text{eV}} \right)^2 \text{ MHz} \quad (\text{B.89})$$

と表すこともできる。

実際のスペクトルは、いろいろなエネルギーをもった多数の粒子から放射されるスペクトルの重ね合わせになる。たとえば、高エネルギー電子の分布が、エネルギーが高い電子ほど数が少なくなる、いわゆる非熱的分布をしている場合、シンクロトン放射のスペクトルはべき乗型スペクトル (power law spectrum) となる (図 B.15)。

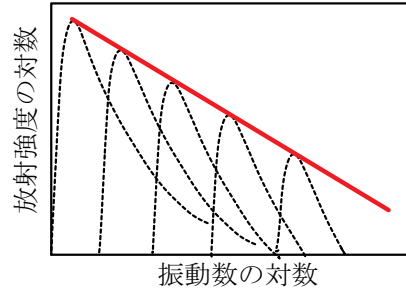


図 B.15: シンクロトン放射のべき乗型スペクトル (多粒子)。

電子のエネルギーを E ($= \gamma mc^2$) として、エネルギーが E と $E + dE$ 内にある電子の個数 $N(E)$ が、

$$N(E)dE = KE^{-p}dE \quad (\text{B.90})$$

という分布になっているとき、粒子分布全体から放射される全放射率は、

$$P_{\text{tot}} \propto B^{(1+p)/2} \nu^{(1-p)/2} \quad (\text{B.91})$$

となる。すなわち、電子分布の指数 p ($N \propto E^{-p}$) と、べき乗型スペクトルの指数 α ($S_\nu \propto \nu^{-\alpha}$) の間には、

$$\alpha = \frac{p-1}{2} \quad (\text{B.92})$$

という関係がある。

B.5 コンプトン散乱

原子に束縛されていない自由電子と光子が衝突すると、お互いに影響を及ぼしあい、それぞれの運動量やエネルギーが変化する。ここでは、電子と光子の衝突（散乱）に関して、電子のエネルギーは変化しないが運動量（方向）のみ変わるトムソン散乱（電子散乱）と、電子のエネルギーも運動量も変化するコンプトン散乱および逆コンプトン散乱について、その結果の概要をまとめておく。

B.5.1 トムソン散乱

自由電子に光子が衝突したとき、入射光子も自由電子も非相対論的なら、すなわち入射光子のエネルギー $h\nu$ も散乱電子の運動エネルギー $mv^2/2$ も散乱電子の静止エネルギー mc^2 に比べて十分に小さければ、自由電子はほとんど動かない。また、衝突によって入射光子のエネルギーはほとんど変わらずに進行方向だけが変化する。すなわち散乱（scattering）する。これをトムソン散乱（Thomson scattering）とか電子散乱（electron scattering）と呼んでいる。

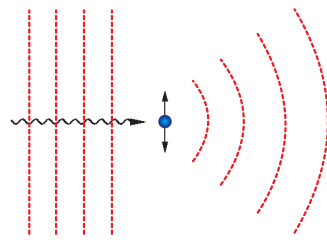


図 B.16: 電磁波の入射と電子による散乱。

波動的なイメージでは、トムソン散乱／電子散乱は図 B.16 のように考えることができる。静止している自由電子に向けて、図の左方から電磁波（平面

波)が入射してきたとしよう。入射電磁波の電場 [たとえば, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha)$] によって, 自由電子は揺動を受けて, 上下に単振動を始める。そして自由電子 (荷電粒子) が単振動 (加速運動) を行うと, 電磁波が発生し四方八方へ放射されるが, この自由電子から放射される電磁波は平面波ではない。すなわち散乱される。

このとき, ある方向に散乱される割合として, 散乱有効断面積を以下のように定義する:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{ある方向へ単位時間あたりに放出される散乱波のエネルギー} [\text{erg s}^{-1}]}{\text{入射波のエネルギー流束密度} [\text{erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2}]} \quad (\text{B.93})$$

一方, 粒子的なイメージでは, 左方から振動数 ν (エネルギー $h\nu$ で方向ベクトル \mathbf{n}) の光子が入射してきて, 静止している自由電子に衝突したとき, ある割合でもって, 進行方向から θ の方向へ, 振動数 ν' (エネルギー $h\nu'$ で方向ベクトル \mathbf{n}') の光子として散乱される (図 B.17)。

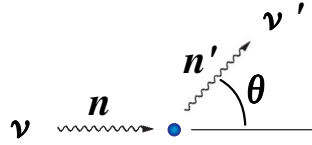


図 B.17: トムソン散乱 (電子散乱)。

非相対論的なトムソン散乱 (電子散乱) では, 光子の振動数 (エネルギー) は不変 ($\nu = \nu'$) だが, 光子の方向は変わる。具体的には, 上で定義した散乱有効断面積が,

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 [1 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')^2] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \theta) = \frac{1}{2} r_e^2 (1 + \cos^2 \theta) \quad (\text{B.94}) \end{aligned}$$

のようになる (図 B.18). ただしここで,

$$r_e = \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 = 2.8179 \times 10^{-13} \text{ cm} \quad (\text{B.95})$$

は, 古典電子半径 (classical electron radius) である.

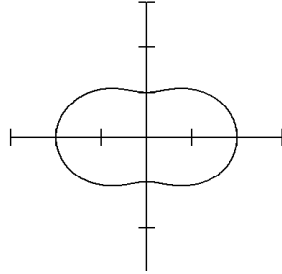


図 B.18: トムソン散乱の角分布.

トムソン散乱の有効散乱断面積 (B.94) 式を全方向にわたって積分すると, 全散乱断面積が得られる:

$$\begin{aligned} \sigma &= \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \equiv \sigma_T = 6.6520 \times 10^{-25} \text{ cm}^2 \quad (\text{B.96}) \end{aligned}$$

ここで得られた全散乱断面積 σ_T をトムソン散乱の断面積と呼んでいる.

質量を電子質量 m_e ($= 9.1094 \times 10^{-28} \text{ g}$), 電荷を素電荷 e ($= 4.8032 \times 10^{-10} \text{ esu}$), 光速 c を $= 3.0 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$ としたとき, 古典電子半径の値とトムソン散乱断面積の値を確かめてみるとよい.

B.5.2 コンプトン散乱

自由電子に光子が衝突したとき, 入射光子は相対論的だが自由電子は非相対論的な場合, すなわち入射光子のエネルギー $h\nu$ が散乱電子の静止エネルギー

ギー $m_e c^2$ に比べて同じくらいになると、自由電子の反跳が無視できなくなる。このときは、衝突（散乱）によって、光子のエネルギーも進行方向も変化する。これをコンプトン散乱（Compton scattering）と呼んでいる。

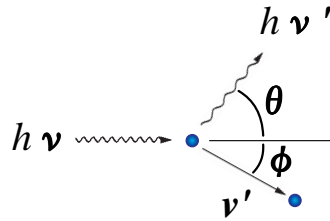


図 B.19: コンプトン散乱.

左方から振動数 ν （エネルギー $h\nu$ ）の光子が入射してきて、静止している自由電子に衝突したとき、光子は進行方向から θ の方向へ振動数 ν' （エネルギー $h\nu'$ ）の光子として散乱され、一方、電子は進行方向から ϕ の方向へ速度 v' で弾かれたとしよう（図 B.19）。このとき、散乱前と散乱後における、光子の振動数（波長）が満たす関係式を導いてみよう。

まず、散乱後の電子のローレンツ因子を $\gamma' = 1/\sqrt{1-(v'/c)^2}$ として、散乱前と散乱後におけるエネルギーの保存、入射光子の進行方向の運動量保存、入射光子の進行方向と垂直方向の運動量保存は、それぞれ、

$$h\nu + m_e c^2 = h\nu' + \gamma' m_e c^2, \quad (\text{B.97})$$

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \theta + \gamma' m_e v' \cos \phi, \quad (\text{B.98})$$

$$0 = \frac{h\nu'}{c} \sin \theta - \gamma' m_e v' \sin \phi \quad (\text{B.99})$$

のように表される。

運動量保存の (B.98) 式と (B.99) 式を少し変形して、両辺を 2 乗して加えると、

$$\left(\frac{h\nu}{c} - \frac{h\nu'}{c} \cos \theta \right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c} \sin \theta \right)^2 = \gamma'^2 m_e^2 v'^2 = \gamma'^2 m_e^2 c^2 - m_e^2 c^2 \quad (\text{B.100})$$

のようになり，この右辺にエネルギー保存の (B.97) を代入すると，

$$\left(\frac{h\nu}{c} - \frac{h\nu'}{c} \cos\theta\right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c} \sin\theta\right)^2 = \left(\frac{h\nu}{c} + m_e c - \frac{h\nu'}{c}\right)^2 - m_e^2 c^2 \quad (\text{B.101})$$

となる．さらに展開して整理すると，

$$m_e h\nu - m_e h\nu' = \frac{h\nu}{c} \frac{h\nu'}{c} (1 - \cos\theta) \quad (\text{B.102})$$

あるいは，

$$\frac{m_e c^2}{h\nu'} - \frac{m_e c^2}{h\nu} = 1 - \cos\theta, \quad (\text{B.103})$$

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_e c^2} (1 - \cos\theta)} \quad (\text{B.104})$$

が得られる．この (B.103) 式および (B.104) 式が，散乱前および散乱後の光子のエネルギー（振動数）と散乱角の間に成り立つ関係式である．後者の (B.104) 式はコンプトンの公式とも呼ばれる．

波長 λ ($= c/\nu$) を用いると，散乱前後の関係式は，

$$\lambda' - \lambda = \lambda_C (1 - \cos\theta) \quad (\text{B.105})$$

のように表すこともできる．ただしここで，

$$\lambda_C \equiv \frac{h}{m_e c} = 0.002426 \text{ nm} \quad (\text{B.106})$$

は，電子のコンプトン波長である．これからわかるように，光子の波長がコンプトン波長ぐらいに短くなって初めて，光子のエネルギーが変化するコンプトン散乱が有効に効き始める（光子の波長がコンプトン波長より十分に長ければ，光子のエネルギーが変化しない通常のトムソン散乱になる）．

上記の (B.103) 式や (B.105) 式を見るとわかるように，静止している自由電子に光子が衝突して生じるコンプトン散乱では，散乱後の光子の波長は散乱前に比べて伸びる．すなわち，散乱によって光子のエネルギーは減少する．散乱による振動数の変化量は，(B.102) 式を用いると，だいたいの目安として，

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\nu' - \nu}{\nu} \sim -\frac{h\nu}{m_e c^2} \quad (\text{B.107})$$

程度になる。

なお、入射光子のエネルギーが高くなり相対論的効果が効いてくると、光子のエネルギーだけでなく、散乱断面積も変化を受ける。相対論的な場合には、散乱断面積はトムソン散乱の断面積よりも小さくなる⁶。

B.5.3 逆コンプトン散乱

一般には自由電子も運動している。とくに、高速で運動している自由電子と光子が衝突したとき、すなわち電子の運動エネルギー $m_e v^2/2$ が静止エネルギー $m_e c^2$ に比べて同じくらいするとき、散乱によって光子は大きく影響を受ける。すなわち衝突（散乱）によって、光子のエネルギーも進行方向も変化する。しかも、通常のコンプトン散乱では、散乱によって光子のエネルギーは減少するが、高エネルギーの電子によるコンプトン散乱では、むしろ光子のエネルギーは増加する。これを逆コンプトン散乱 (inverse Compton scattering) と呼んでいる。

たとえば、振動数 ν (エネルギー $h\nu$) の光子が入射してきて、速度 v で運動している自由電子と衝突した後、光子は振動数 ν' (エネルギー $h\nu'$) の光子として散乱され、一方、電子は速度 v' で弾かれたとしよう (図 B.20)。最初の電子の速度が 0 であれば、つねに $\nu > \nu'$ になったが (コンプトン散乱)、最初の電子の速度が 0 でなければ、 $\nu > \nu'$ の場合も $\nu < \nu'$ の場合も起こりうるだろう。

光子系 (振動数 ν) と電子系 (温度 T) の間で、散乱が頻繁に起こって平衡

⁶相対論的な場合には、散乱有効断面積はクライナー-仁科の公式で表される：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{3}{16\pi} \sigma_T \left(\frac{\nu'}{\nu}\right)^2 \left(\frac{\nu'}{\nu} + \frac{\nu}{\nu'} - 1 + \cos^2 \theta\right) \quad (\text{B.108})$$

さらに角度方向に積分して得られる全散乱断面積は、

$$\sigma \sim \begin{cases} \sigma_T \left(1 - \frac{2h\nu}{m_e c^2}\right) & h\nu \ll m_e c^2 \\ \frac{3}{8} \sigma_T \left(\frac{m_e c^2}{h\nu}\right) \left[\ln\left(\frac{2h\nu}{m_e c^2}\right) + \frac{1}{2}\right] & h\nu \gg m_e c^2 \end{cases} \quad (\text{B.109})$$

ようになる。いずれにせよ、トムソン散乱の断面積 σ_T より小さくなる。

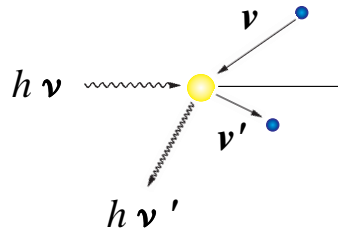


図 B.20: 逆コンプトン散乱.

状態になっているとき，1回の散乱でやり取りされる平均のエネルギー変化は，

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{h\nu}{m_e c^2} + \frac{4kT}{m_e c^2} \quad (\text{B.110})$$

ほどになる．右辺の第1項は，光子が電子をコンプトン散乱してエネルギーを失うもので（電子はエネルギーを得る），第2項は，光子が電子に逆コンプトン散乱されてエネルギーを得るものだ（電子はエネルギーを失う）．したがって，光子のエネルギーが $h\nu > 4kT$ ならば，光子系から電子系へエネルギーが流れ，光子のエネルギーが $h\nu < 4kT$ ならば，電子系から光子系にエネルギーが流れる．

以上，相対論的電子が低エネルギーの光子系と衝突して，電子はエネルギーを失い，光子が高いエネルギーになる過程を，逆コンプトン散乱と呼んでいる．

(1) 逆コンプトン散乱のエネルギー損失率

電子のトムソン散乱の断面積：

$$\sigma_T \equiv \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 = 6.6520 \times 10^{-25} \text{ cm}^2 \quad (\text{B.111})$$

と，光子のエネルギー密度：

$$U_{\text{rad}} \equiv 2h \int \nu^3 n(\nu) d\nu \quad (\text{B.112})$$

を使うと (n は光子の分布関数), 逆コンプトン散乱による電子のエネルギー損失率 (放射率に相当) は,

$$P = \frac{4}{3} \sigma_T c \gamma^2 U_{\text{rad}} \quad (\text{B.113})$$

のように表される. この (B.113) 式の損失率の形は, 付録 B.4.2 で述べたシンクロトロン放射の放射率の形と類似している点に注意しておく.

(2) 逆コンプトン散乱のスペクトル

低エネルギーの光子が逆コンプトン散乱を 1 回受けると, およそ $4kT/m_e c^2$ だけエネルギーの高い光子に叩き上げられる. そのような過程が繰り返されると, 光子のエネルギーはどんどん高くなっていくが, 多数回散乱される光子の数は減っていくし, 高エネルギーの電子も減少する. その結果, 逆コンプトン散乱のスペクトルはべき乗型スペクトル (power law spectrum) となる (図 B.21).

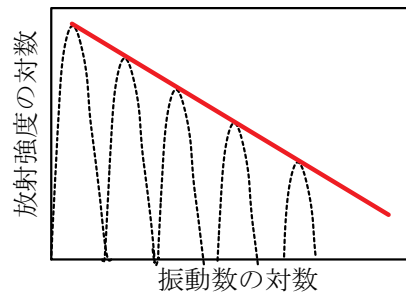


図 B.21: コンプトン散乱のべき乗型スペクトル (多粒子).

またシンクロトロン放射の場合と同様に, 電子分布の指数 p ($N \propto E^{-p}$) と, べき乗型スペクトルの指数 α ($S_\nu \propto \nu^{-\alpha}$) の間には,

$$\alpha = \frac{p-1}{2} \quad (\text{B.114})$$

という関係がある.

B.6 原子の離散スペクトル

水素やヘリウムなどさまざまな原子は、量子力学的な理由からとびとびのエネルギー状態しか取れないため、それぞれの原子に特有の波長の光を吸収・放出する。ここでは、このようなとびとび（離散的）な原子スペクトルに関して、(前期)量子論の考えに基づいて、概要をまとめておく。

B.6.1 原子の構造

原子は原子核と周囲の電子からなる（水素原子の場合は、1個の陽子と1個の電子）。量子力学的な描像では、電子はある存在確率をもった電子雲として原子核を取り巻いている（図 B.22 左）。一方、古典的な描像では、電子は点電荷として原子核のまわりを軌道運動している（図 B.22 右）。

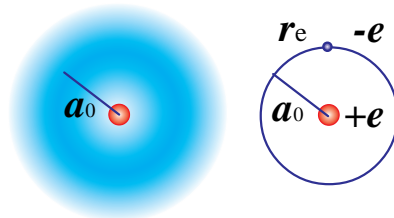


図 B.22: 原子のモデル。

古典的な描像で決定的に具合が悪いのは、原子核のまわりを円運動（加速運動）する電子は、電磁波を放出してエネルギーを失い、そのままと、あっという間（だいたい 10^{-11} s）に原子核に落ち込んでしまう点だ。そのため、次に述べるような量子条件を課して、ある特定の軌道にいる電子は定常状態で電磁波を放射しない、と仮定しなければならない。

なお、量子力学的な描像でも古典的な描像でも、水素原子のサイズ（電子軌道の半径）は、だいたいボーア半径（Bohr radius）：

$$a_0 \equiv \frac{h^2}{4\pi^2 m_e e^2} = 5.2918 \times 10^{-9} \text{ cm} = 0.5 \text{ \AA} \quad (\text{B.115})$$

程度と考えてよい。また古典電子半径：

$$r_e \equiv \frac{e^2}{m_e c^2} = 2.8179 \times 10^{-13} \text{ cm} \quad (\text{B.116})$$

は、ボーア半径の1万分の1ぐらいになる。さらに電子の質量と素電荷は、それぞれ、

$$m_e = 9.1094 \times 10^{-28} \text{ g}, \quad (\text{B.117})$$

$$e = 4.8032 \times 10^{-10} \text{ esu} \quad (\text{B.118})$$

で、プランク定数は、

$$h = 6.6261 \times 10^{-27} \text{ erg s} \quad (\text{B.119})$$

である。

B.6.2 量子条件とボーアモデル

ここでは量子力学の詳細には立ち入らずに、古典的な描像のもとでボーアの量子条件を用いて、エネルギー準位やリュードベリの公式を導いてみよう。

水素原子を念頭に置いて、陽子（電荷 e ）のまわりを電子（電荷 $-e$ ）が円運動しているとしよう（図 B.23）。円運動の半径は r （とびとびという意味で r_n も使う）、回転速度は v （これもとびとびという意味で v_n も使う）とする。

このとき、電子の古典的な回転運動に関して、半径方向の力の釣り合いから、

$$m_e \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{e^2}{r^2} + m_e \frac{v^2}{r} = 0 \quad (\text{B.120})$$

が成り立つ。この (B.120) 式右辺の第1項は電磁力で、第2項は遠心力である。また、回転方向に関する量子条件として、電子の角運動量 j は、 n を自然数として、

$$j = m_e r v = n \frac{h}{2\pi} \quad (\text{B.121})$$

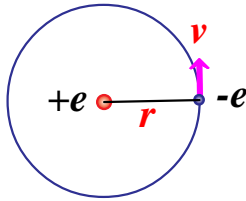


図 B.23: ボーアの原子モデル.

という関係を満たすと仮定する. さらに, 電子の古典的なエネルギーに対しては,

$$E = \frac{1}{2}m_e v^2 - \frac{e^2}{r} \quad (\text{B.122})$$

が成り立つ. この (B.122) 式右辺の第 1 項は回転運動のエネルギーで, 第 2 項は電磁エネルギーである.

ここで, 量子条件 (B.121) 式について, 少し補足しておこう (図 B.24). 電子が波長 λ をもったある種の波動 (物質波) だと考えたとき, 円軌道の円周の長さが波長の整数倍になっているという条件:

$$2\pi r = n\lambda \quad (\text{B.123})$$

が量子条件に他ならない. 物質波の波長は,

$$\lambda = \frac{h}{m_e v} \quad (\text{B.124})$$

と表されるので, 結局, 電子の角運動量として, (B.121) 式が得られることになる.

さて, (B.120) 式から (B.122) 式に戻ると, まず, (B.120) 式と (B.121) 式から, 電子の軌道半径と速度を求めると, それぞれ,

$$r = r_n = \frac{h^2}{4\pi^2 m_e e^2} n^2 = a_0 n^2 = 0.053 n^2 \text{ nm} \quad (\text{B.125})$$

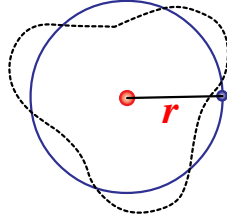


図 B.24: 量子条件.

$$v = v_n = \frac{2\pi e^2}{h} \frac{1}{n} = 2.2 \times 10^8 \frac{1}{n} \text{ cm s}^{-1} \quad (\text{B.126})$$

のように、とびとびの値として得られる。ただしここで、 $a_0 = 0.053 \text{ nm}$ は先に出たボーア半径である。さらに、(B.125) 式と (B.126) 式を (B.122) 式に代入すると、やはりとびとびのエネルギーの値として、

$$E = E_n = -\frac{2\pi^2 m_e e^4}{h^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{e^2}{2a_0} \frac{1}{n^2} = -13.59 \frac{1}{n^2} \text{ eV} \quad (\text{B.127})$$

が得られる。

最後に、エネルギー $E_{n'}$ の準位とエネルギー E_n の準位との遷移で放出される光のエネルギーが、

$$h\nu = E_{n'} - E_n \quad (\text{B.128})$$

という関係を満たすとしたら (ボーアの振動数条件), 光の振動数 (波長) に対して、

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = \frac{2\pi^2 m_e e^4}{ch^3} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) \quad (\text{B.129})$$

が成り立つ。これが水素原子に対するリュードベリの公式である。