

# 1 重力の法則

物理的な力としては、荷電粒子の間で働く電磁力、原子核内で働く強い力と弱い力、そして質量をもった粒子の間で働く重力が知られている。ここでは、まず最初に、巨視的なスケールで働いて天体の力学を支配する、重力 (gravitation) について、簡単に整理しておこう。

## 1.1 ニュートンの運動方程式

質量  $m$  の粒子に力  $F$  が働いて加速度  $a$  で動くとき、粒子がしたがう運動方程式は、

$$ma = F \tag{1.1}$$

と表せる (図1・1)。ここで、力  $F$  は剛体的な力でも、摩擦力でも、電磁気力でも、そして重力でもよい。

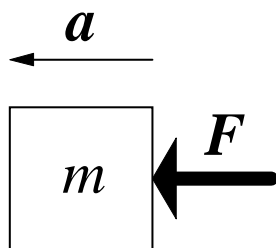


図1.1 質量  $m$  の物体にかかる力  $F$  と物体の加速度  $a$

上の (1.1) 式は、性質の異なった3つの物理量  $m$ 、 $a$ 、 $F$  を結びつけたもので、その読み方としては、

- 質量  $m$  の粒子に力  $F$  が働いたときの加速度は  $a$  になる
- 質量  $m$  の粒子に加速度  $a$  を与える力は  $F$  である
- 力  $F$  を働かせて加速度が  $a$  になれば、質量は  $m$  である

のように読む。

上記の運動方程式は、しばしばニュートンの運動の第二法則 (運動の法則) として知られている。ところで、力が働いていなければ、この法則から加速度は0となるので、粒子の運動は等速直線運動 (速度が0の静止状態を含む) になる。これは運動の第一法則 (慣性の法則) に他ならない。また右辺の力として、作用と反作用の両方を考えれば、この法則は運動の第三法則 (作用・反作用の法則) になる。したがって、運動の第二法則は、実はニュートンの運動の3つの法則をすべて含んでいるといえる。

## 1.2 重力と重力ポテンシャル

天体の力学において基本的な力は、質量をもったあらゆる物体の間に働く万有引力 (universal gravitation) である。また3次元空間内で働く力は、一般に3次元のベクトル量だが、その力があるスカラー関数の空間微分 (勾配) で表されるとき、そのような力を保存力と呼び、そのときのスカラー関数をポテンシャル (potential) と呼ぶ。万有引力 (重力) も保存力の一つで、ポテンシャルをもつ。

### (1) 重力と重力加速度

質量  $M$  の天体と質量  $m$  の物体の間に働く重力 (gravitational force)  $F$  は、それらの間の距離を  $r$  として、

$$F = -\frac{GMm}{r^2} \tag{1.2}$$

のように表される (図1・2)。ここで、 $G$  ( $= 6.67 \times 10^{-8} \text{ dyn cm}^2 \text{ g}^{-2}$ ) は万有引力定数である。

単位質量当りの重力すなわち重力加速度 (gravitational acceleration)  $g$  は、

$$g = \frac{F}{m} = -\frac{GM}{r^2} \tag{1.3}$$

である。

問1.1 質量  $M$  に地球の質量  $M_{\oplus}$  ( $= 5.98 \times 10^{27} \text{ g}$ )、距離  $r$  に地球半径  $R_{\oplus}$  ( $= 6378 \text{ km}$ ) を入れて、地球

表面での重力加速度  $g_{\oplus}$  が、

$$g_{\oplus} = \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} = 980 \text{ cm s}^{-1}$$

となることを確かめよ。

## (2) 位置エネルギーと重力ポテンシャル

質量  $M$  の天体と質量  $m$  の物体の間の位置エネルギー (potential energy)  $E$  は、それらの間の距離を  $r$  として、

$$E = -\frac{GMm}{r} \quad (1.4)$$

である。単位質量当りの位置エネルギーすなわちポテンシャル (potential)  $\phi$  は、

$$\phi = \frac{E}{m} = -\frac{GM}{r} \quad (1.5)$$

である。

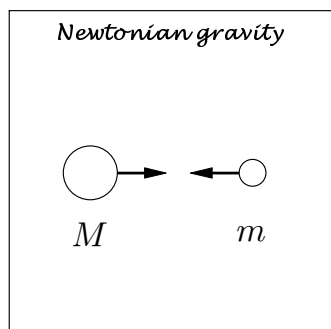


図 1.2 質量  $M$  の物体と質量  $m$  の物体

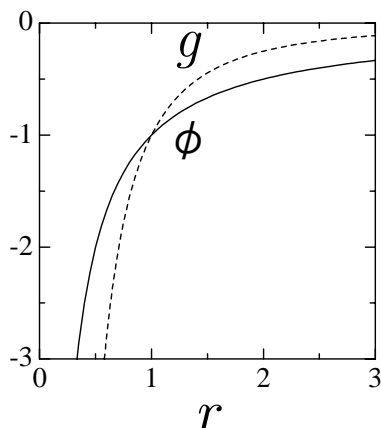


図 1.3 質量  $M$  の天体の重力加速度  $g$  と重力ポテンシャル  $\phi$

## (3) 力とポテンシャルの関係

重力や位置エネルギー、ポテンシャルが、距離  $r$  だけの 1 次元の関数の場合、重力  $F$  と位置エネルギー  $E$  の間には、

$$F = -\frac{dE}{dr} \quad (1.6)$$

という関係が成り立つ。また、重力加速度  $g$  とポテンシャル  $\phi$  の間には、

$$g = -\frac{d\phi}{dr} \quad (1.7)$$

という関係が成り立つ (図 1・3)。

より一般的に、重力加速度  $g$  が 3 次元空間内のベクトルの場合、重力加速度  $g$  とポテンシャル  $\phi$  の関係は、

$$g = -\nabla\phi \quad (1.8)$$

と表せる。ここで、 $\nabla$  (ナブラと読む) はベクトル演算子で、たとえば直角座標系  $(x, y, z)$  では、

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (1.9)$$

のようになり、また円筒座標系  $(r, \varphi, z)$  では、

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (1.10)$$

のように表される。

コラム：数式と  $\text{\LaTeX}$   
数式が多い!!

## 2 地上の力学

まずもっとも簡単な天体の力学問題として、地上における物体の運動を考えてみよう(図2・1)。地表近傍では、重力加速度  $g$  の値は一定とみなしてよい( $g = 980 \text{ cm s}^{-2}$ )。



図 2.1 落ちるリンゴ

### 2.1 自由落下

地表近傍で自由落下する物体(落体)の運動方程式は、水平方向を  $x$  軸、 $y$  軸、鉛直上向き(重力加速度と反対方向)を  $z$  軸とする座標系(図2・2)で、

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg \quad \text{あるいは} \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -g \quad (2.1)$$

と表せる。ただし  $m$  は落体の質量、 $g$  は重力加速度の大きさ(一定)である。

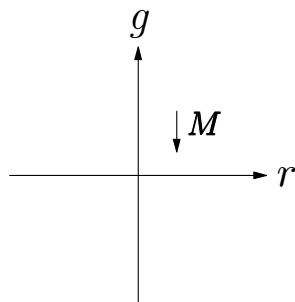


図 2.2 地表近傍における自由落下運動の座標系

上の微分方程式の解は、よく知られているように、落体の初期位置を  $z_0$  とし、初速度を  $v_0$  とすると、

$$\frac{dz}{dt} = v = -gt + v_0, \quad (2.2)$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + z_0 \quad (2.3)$$

である。とくに、時刻  $t = 0$  で落体が原点( $z = 0$ )に静止している( $v = 0$ )という初期条件のもとでは、解は、

$$\frac{dz}{dt} = v = -gt, \quad (2.4)$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 \quad (2.5)$$

となる(図2・3)。

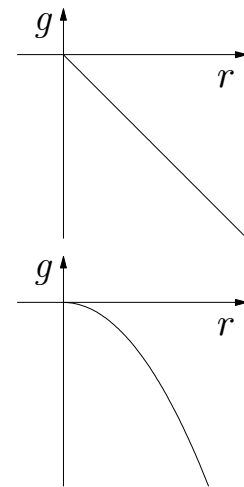


図 2.3 地表近傍における自由落下運動の速度  $v$  と座標  $z$

### 2.2 雨滴の落下

速度に比例する空気抵抗を受ける落体(たとえば雨滴)の運動方程式は、鉛直上向き(重力加速度と反対方向)を  $z$  軸とする座標系で、

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - kv, \quad (2.6)$$

と表せる(図2・4)。ただし  $m$  は落体の質量、 $g$  は重力加速度の大きさ、 $k$  は空気抵抗の大きさ、そして  $v$  は速度の  $z$  成分である(落下運動なので速度の符号はマイナス)。

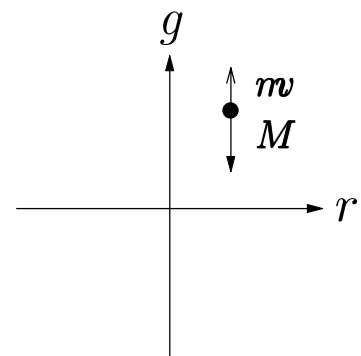


図 2.4 雨滴の落下運動

時刻  $t = 0$  で雨滴が原点 ( $z = 0$ ) に静止している ( $v = 0$ ) という初期条件のもとで上式を解く。

まず (2.6) 式を変数分離形に変形する：

$$\frac{dv}{v + mg/k} = -\frac{k}{m} dt \quad (2.7)$$

これを時間で積分し、

$$\ln \left| v + \frac{mg}{k} \right| = -\frac{kt}{m} + C_1 \quad (2.8)$$

となり、対数を解いて積分定数を置き換え、

$$v = -\frac{mg}{k} + C_2 e^{-kt/m} \quad (2.9)$$

を得る。ここで初期条件 ( $t = 0$  で  $v = 0$ ) を考慮すると、 $C_2 = mg/k$  となり、結局、 $z$  方向の速度として、

$$v = \frac{mg}{k} (e^{-kt/m} - 1) \quad (2.10)$$

という解が得られる。さらに初期条件 ( $t = 0$  で  $z = 0$ ) を考慮してもう 1 回積分すると、

$$z = -\frac{mg}{k} \left[ t + \frac{m}{k} (e^{-kt/m} - 1) \right] \quad (2.11)$$

となる。

十分時間が経てば ( $t \rightarrow \infty$ )、(2.10) 式や (2.11) 式の指数項は 0 になるので、

$$v \rightarrow v_\infty = -\frac{mg}{k}, \quad (2.12)$$

$$z \rightarrow -\frac{mg}{k} t \quad (2.13)$$

となる。とくに (2.12) 式から、雨滴の落下速度は一定の値  $v_\infty$  に近づく。これが雨滴の最終速度 (terminal speed) である (終末速度とか終端速度とも呼ばれる)。

終末速度の意味は (2.6) 式に戻って考えればよくわかる。すなわち雨滴の落下は重力によって次第に加速されるが、雨滴に働く重力 ( $-mg$ ) と速度に比例する抵抗 ( $-kv$ ) が釣り合った段階でネットな力が 0 となり、雨滴は一定の最終速度に達するのだ。

ちなみに、典型的な雨滴 (半径 1mm 程度) の地表付近での最終速度は、およそ 7m/s くらいと測定されている。

問 2.1 雨滴の落下速度のグラフを描いてみよ。

問 2.2 雨滴の落下距離のグラフを描いてみよ。

コラム：コロニーに降る雨

スペースコロニーとは、… 未了。

角速度 で回転しているスペースコロニーの内部では、半径方向外向きに遠心力が働く。このとき、遠心力の大きさは一定ではなく、中心からの距離に比例する。そのような回転系における運動を考えてみよう。

地上の場合と同様に、スペースコロニーの中での雨滴の運動を考えることができる。結論のみ述べる。(1) コロニー内では、遠心力による (疑似重力) 加速度は一定ではなく、回転軸からの距離に比例して増加する。そのため、雨滴 (一般には落下粒子) に対して終末速度は存在しない。(2) コロニー内で雲の発生が地球上と類似している場合 (とくに雲底が地表 500 km から 1 km にあり、そこから雨滴の落下がはじまる場合) 半径が数 km より小さなコロニーでは常に横殴りの雨が降る。ラーマのような半径が 10 km のオーダーになると、雨の降り方は地球上とあまり変わらない。

### 3 天体のまわりの力学

天体のまわりの重力場中における運動を考えよう(図3・1)。地上近傍では、重力加速度をほぼ一定と近似できるが、中心からの距離が大きく変化する場合は、重力加速度を一定とみなすことはできない。



図3.1 天体への物体の落下

#### 3.1 自由落下

質量  $M$  の天体の中心から距離  $r$  における重力加速度は、 $g = -GM/r^2$  なので、半径方向に運動する質量  $m$  の質点の運動方程式は、

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GMm}{r^2}, \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} \quad (3.1)$$

となる(図3・2)。この式を初期条件: 時間  $t = t_0$  で  $r = r_0$  および  $v = v_0$  のもとで積分する。

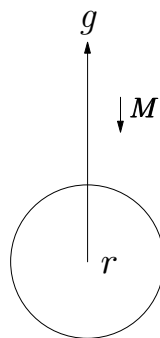


図3.2 天体への自由落下運動の座標系

まず両辺に  $v = dr/dt$  をかけて、右辺を左辺に移項すると、

$$\frac{dr}{dt} \frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{dr}{dt} \frac{GM}{r^2} = 0 \quad (3.2)$$

となる。さらに半径  $r$  が時間  $t$  の関数であることに注意して、積分すると、中間積分(エネルギー積分)として、

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r} = E = \frac{v_0^2}{2} - \frac{GM}{r_0} \quad (3.3)$$

が得られる。ここで  $E$  は積分定数だが、初期条件から上のようになる。

物理的には、上の(3.3)は、運動エネルギー( $v^2/2$ )と重力エネルギー( $-GM/r$ )の和  $E$  が保存されること(エネルギー保存)を表している。

さらに、落下速度は、

$$\frac{dr}{dt} = v = -\sqrt{2E + \frac{2GM}{r}} \quad (3.4)$$

である。初速度  $v_0$  が 0 なら、 $E = -GM/r_0$  なので、落下速度は、

$$\frac{dr}{dt} = v = -\sqrt{\frac{2GM}{r} - \frac{2GM}{r_0}} \quad (3.5)$$

となる(図3・3)。

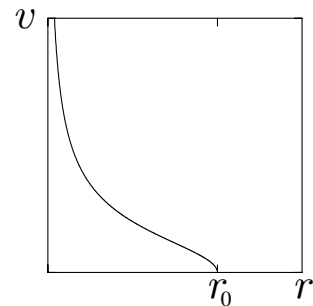


図3.3 天体への自由落下の速度

問3.1 上の(3.5)式の落下速度を積分して、 $r = r_0$  から  $r = 0$  まで自由落下する落下時間  $t_{ff}$  が、

$$t_{ff} = \pi \sqrt{\frac{r_0^3}{8GM}} \quad (3.6)$$

となることを確かめよ(有限である!)

ヒント:(3.5)式を変数分離形に直した後、 $r = r_0 \cos^2 \theta$  という変数変換をして積分してみよ。

問3.2 月が地球に自由落下する時間を求めよ。

### 3.2 重力列車

地球内部をくり抜いて建設した真っ直ぐのトンネル内を、それぞれの深さでの内部物質の重力を受けながら自由落下して走る列車を重力列車と呼ぶ。ここでは地球の中心を貫くトンネルを考えよう(図3・4)。

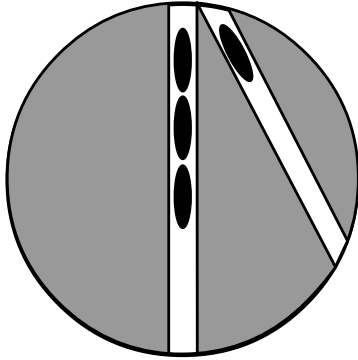


図3.4 重力列車

地球の密度  $\rho$  を一定とすると、半径  $r$  より内側の質量  $M_r$  は、

$$M_r = \frac{4\pi}{3} r^2 \rho \quad (3.7)$$

なので、地球の中心から距離  $r$  における重力加速度は、

$$g = -\frac{GM}{r^2} = -\frac{4\pi G}{3} \rho r \quad (3.8)$$

となり、 $r$  に比例する。したがって、半径方向に運動する質点の運動方程式は、

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3} \rho r \quad (3.9)$$

となる。

この式を、初期条件：時間  $t = 0$  で  $r = R_{\oplus}$  (地表) および  $v = 0$  で積分すると、

$$\frac{v^2}{2} + \frac{2\pi G \rho}{3} r^2 = E = \frac{2\pi G \rho}{3} R_{\oplus}^2 \quad (3.10)$$

が得られる(エネルギー積分)。

地球の質量が  $M_{\oplus} = (4/3)\pi R_{\oplus}^3 \rho$  であることに注意すると、上の式から、落下速度  $v$  は、

$$v = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}} \sqrt{1 - \frac{r^2}{R_{\oplus}^2}} \quad (3.11)$$

となる。

さらにこの式を積分して、 $r = R_{\oplus}$  から  $r = 0$  まで落下する落下時間  $T$  は、

$$T = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R_{\oplus}^2}{GM_{\oplus}}} \quad (3.12)$$

になる。具体的数値を入れると、

$$T = 21 \text{ 分} \quad (3.13)$$

でなる。中心を通過して反対側まで達するには 42 分かかる。

問3.3 斜めにくり抜いた場合はどうなるか？

問3.4 半径 1 pc で質量  $10^5 M_{\odot}$  ( $1M_{\odot} = 1.99 \times 10^{33}$  g) の巨大分子雲をブラックホールが重力列車するとき、落下時間を求めよ。

コラム：マイクロブラックホールの運動

## 4 惑星の力学

今度は回転を考慮して、天体のまわりの運動を考えてみよう。たとえば、地球のまわりの人工衛星の運動、月の公転運動、太陽のまわりの惑星の公転運動(図4・1)、そして銀河系における太陽の運動など、天体のまわりの回転運動にはいろいろなものがある。いわゆるケプラーの法則(Kepler's laws)が成り立つ、このような天体のまわりの運動は、ケプラー運動と呼ばれることもあるが、天体の力学の基本である。<sup>1</sup>

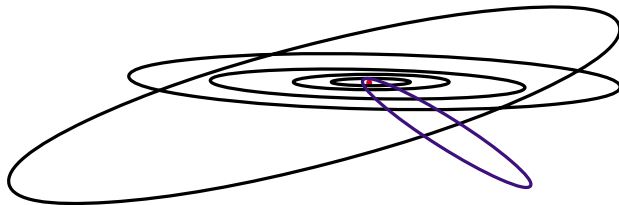


図 4.1 太陽系の惑星軌道

### 4.1 ケプラーの第三法則

質量  $M$  の天体のまわりを質量  $m$  の天体が半径  $r$  の円軌道を描いて公転運動しているとす(図4・2)。簡単のために、 $M$  は  $m$  より十分大きいとする(その結果、全系の重心は  $M$  の中心と考えてよい)。さらに天体  $m$  の軌道は半径  $r$  の円軌道とする。このとき、天体  $M$  が天体  $m$  におよぼす重力と、天体  $m$  が円運動することによって生じる遠心力との釣り合いから、

$$\frac{GMm}{r^2} = mr\Omega^2 = m\frac{v^2}{r} \quad (4.1)$$

<sup>1</sup>ケプラーの法則

1. 楕円の法則 惑星は太陽を一つの焦点とする楕円軌道を描く。
2. 面積速度一定の法則 太陽と惑星を結ぶ線分が一定時間に描く扇型の面積は常に一定である。
3. 調和の法則 惑星の公転周期  $T$  の2乗と長半径  $a$  の3乗の比  $T^2/a^3$  は、すべての惑星に共通で一定の値になる。

が成り立つ。ここで  $\Omega$  は回転角速度で、 $v$  は回転(公転)速度である( $v = r\Omega$ )。

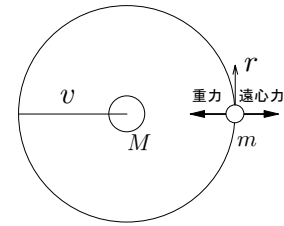


図 4.2 天体のまわりの円軌道における力の釣り合い

このようなケプラー運動の場合、回転角速度  $\Omega$  は、

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}} \quad (4.2)$$

となり、また回転速度  $v$  は、

$$v = r\Omega = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad (4.3)$$

となる(図4・3)。さらに回転の周期  $P$  は、

$$P = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} \quad (4.4)$$

である。これはケプラーの第三法則(調和の法則)に他ならない。

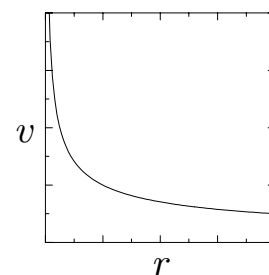


図 4.3 ケプラー運動の回転速度  $v$

問 4.1 地表をすれすれに飛ぶ人工衛星の周期を求めよ。答: 84.3 分

問 4.2 静止人工衛星(公転周期 = 1 日)の軌道半径を求めよ。答: 42297km

問 4.3 地球の公転速度と公転周期を求めよ。

## 4.2 脱出速度

コラム：ブラックホールの脱出速度と半径

地表で水平方向に初速度  $V$  で物体（人工衛星）を投射したとする。簡単のために、空気の抵抗などは考えない。地球半径を  $R_{\oplus}$ 、表面重力加速度を  $g_{\oplus}$  とすると、初速度の大きさによって、運動は以下のようにわかる（図4・4）。

- $V < \sqrt{g_{\oplus} R_{\oplus}}$  : 地球の中心を焦点とする楕円軌道 この場合、地球重力圏から脱出できない
- $V = \sqrt{g_{\oplus} R_{\oplus}}$  : 地表すれすれに飛ぶ円軌道 このときの打ち上げ速度を第1宇宙速度と呼ぶ
- $\sqrt{g_{\oplus} R_{\oplus}} < V < \sqrt{2g_{\oplus} R_{\oplus}}$  : 地球の中心を焦点とする楕円軌道 この範囲でも地球重力圏から脱出できない
- $V = \sqrt{2g_{\oplus} R_{\oplus}}$  : 放物線軌道で脱出する このときの打ち上げ速度を第2宇宙速度と呼ぶ
- $V > \sqrt{2g_{\oplus} R_{\oplus}}$  : 双曲線軌道で脱出する

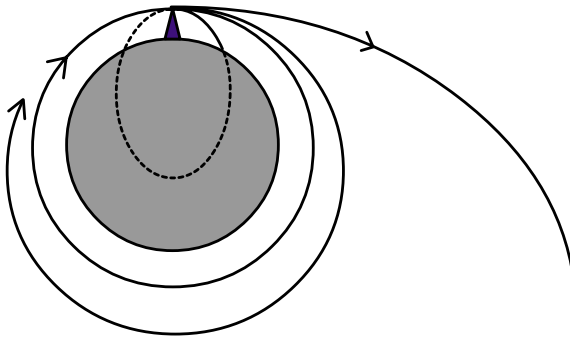


図 4.4 投射体の軌道と脱出速度

問 4.4 第1宇宙速度を求めよ。

問 4.5 第2宇宙速度を求めよ。答： $V_2 = \sqrt{2g_{\oplus} R_{\oplus}} = 11.2 \text{ km s}^{-1}$

地球の場合も含め、より一般的に、天体の重力圏から無限遠方に脱出できる（最低の）速度を、脱出速度（escape velocity）と呼ぶ。



## 5 連星の力学

2つの星がお互いのまわりを回り合っている天体を連星 (binary) とか連星系 (binary system) と呼ぶ (図5・1)。星の半数程度は、連星あるいは多重連星になっていることから、連星はごくありふれた天体であり、したがって銀河の基本構成員である。そして、単独星の質量を求めることは難しいが、連星では万有引力の法則からその質量を直接求めることができる。さらに、場合によっては星同士が相互作用して、激しい活動を引き起こすこともある。以上のような理由で連星の研究は非常に重要だと考えられている。ここではそのような連星系の力学を考える。

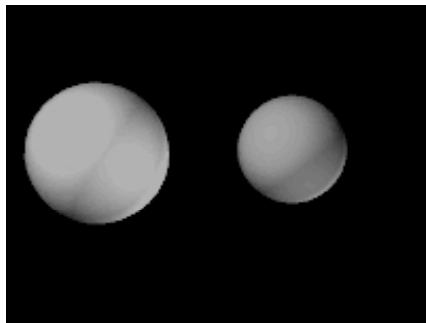


図5.1 連星

### 5.1 連星の構成要素と種類

まず最初に連星の構造について大まかに述べておく (図5・2)。質量  $M_1$  の星と質量  $M_2$  の星がお互いのまわりを回っているとき、それらの2つの星の重心間の距離を連星間距離 (separation)、2つの星の質量中心を共通重心 (center of mass; CM) と呼ぶ。また2つの星が公転運動している平面を軌道面 (orbital plane) とか公転面と呼び、軌道面に垂直な方向と視線方向のなす角を軌道傾斜角 (inclination angle)、そしてお互いのまわりを回る周期を公転周期 (orbital period) という。さらに主星の質量と伴星の質量の比を質量比 (mass ratio) と呼ぶ。なお観測的に明るい方を主星 (primary star)、暗い方を伴星 (companion star) と呼ぶ慣わしである。

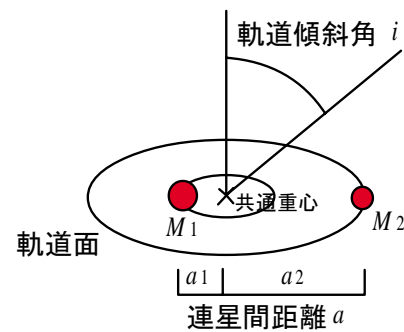


図5.2 連星の構成要素

連星にはいろいろなタイプがあり、分類の仕方も一通りではないが、まず物理的な結びつきに着目して大まかに分けると、万有引力によって重力的には結びついているが、星の大きさに比べて連星間距離が十分大きく、それぞれの星自身は単独星と同じように考えてよいものを遠隔連星 (distant binary) という。一方、連星間距離が小さいために、質量の交換や潮汐力などの相互作用が働いているものを近接連星 (close binary) という。

また観測的に見た場合はつぎの3つに分けられる。望遠鏡で見たときに主星と伴星が分かれて見えるものを実視連星 (visual binary) という (例: 北斗七星のミザール)。また連星の軌道面を斜め方向や真横から見ているとき (軌道傾斜角が大きいとき) には、星の軌道運動に伴ってそれぞれの星の視線速度が変化するため、星のスペクトル線がドップラー偏移を起こす。このスペクトル線のドップラー偏移の周期性から連星であることが分かるものを、分光連星 (spectroscopic binary) と呼ぶ (例: ミザール、アルゴル)。さらに軌道面をほぼ真横から見ているときには、主星と伴星が互いに相手を隠し合うことがある。これを食 (eclipse) とか掩蔽 (occultation) と呼ぶが、食が起こると連星全体の見かけの明るさが変化する。このような食現象による周期的変光から連星であることが分かるものを食連星 (eclipsing binary) という (例: アルゴル)。

## 5.2 一般化されたケプラーの第3法則

星1と(質量  $M_1$ )と星2(質量  $M_2$ )からなる連星を考える(図5・2)。共通重心から星1および星2までの距離をそれぞれ  $a_1$  および  $a_2$ 、連星間距離を  $a$  とする( $a_1 + a_2 = a$ )。まず共通重心に対するテコの原理から、

$$a_1 : a_2 : a = M_2 : M_1 : (M_1 + M_2) \quad (5.1)$$

が成り立つ。したがって軌道半径の比が分かれば、質量の比が得られる。

一方、共通重心のまわりのそれぞれの星の運動について考えると、まず星1については、2つの星の間の万有引力と回転に伴う遠心力が釣り合っている条件から、

$$\frac{GM_1 M_2}{a^2} = M_1 a_1 \Omega^2 \quad (5.2)$$

が成り立つ(万有引力では連星間距離  $a$  を使い、遠心力では星1の公転半径  $a_1$  を使う点に注意)。ただしここで  $G$  は万有引力定数、 $\Omega$  は公転の角速度である。公転周期  $P (= 2\pi/\Omega)$  を使って整理すれば、

$$GM_2 = a_1 a^2 \left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 \quad (5.3)$$

となる。

また星2についても同じように考えると、

$$GM_1 = a_2 a^2 \left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 \quad (5.4)$$

となる。

上の(5.3)式と(5.4)式を辺々加え、 $a = a_1 + a_2$  であることを使うと、

$$M_1 + M_2 = \frac{a^3}{G} \left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 \quad (5.5)$$

が得られる。これを一般化されたケプラーの第3法則という。

問5.1 一般化されたケプラーの第3法則で、星1を質量  $M$  の太陽、星2を質量の無視できる惑星と考え、連星の公転周期  $P$  を惑星の公転周期  $T$  と置くと、太陽

系内の惑星に対するケプラーの第3法則( $T^2/a^3 = \text{一定}$ )が導かれることを示せ。

問5.2 全天でもっとも明るい恒星であるシリウスは、シリウスA(-1.46等のA型主系列星)とシリウスB(8.3等の白色矮星)からなる連星系である(距離8.6光年)。シリウス系の公転周期  $P$  は50.0年、連星間距離  $a$  は20.0天文単位である。シリウス系の空間運動の様子を図に示す(図5・3)。一般化されたケプラーの第3法則から、シリウス系の全質量はいくらになるか? 図から共通重心に対する主星Aと伴星Bの距離の比( $a_1 : a_2$ )を求め、それから主星と伴星の質量の比( $M_1 : M_2$ )を求めよ。主星Aと伴星Bのそれぞれの質量はいくらか?

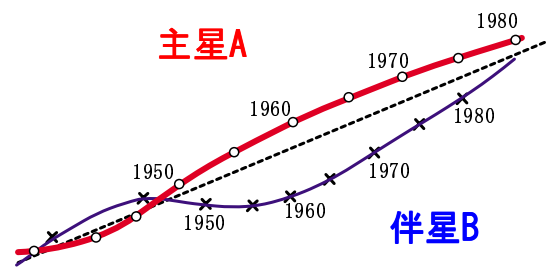


図5.3 シリウスの運動

コラム：コペンハーゲン問題

## 6 星団の力学

いままでは、単独の星や連星における天体の力学を考察してきた。天体の中には、星団や銀河のように、多数の星からなるものもある。たとえば、星はしばしば重力的に結びついた連星や多重星になっているが、数百から数十万個の星が重力的に結びついた集団を星団 (star cluster) と呼ぶ。ここでは、そのような星団について、とくに、球状星団の中の星の運動について考えてみる。

### 6.1 散開星団と球状星団

星団は大きく、散開星団と球状星団に分けられる。

前者の散開星団 (open cluster) は、数百から数千個の星からなる比較的ゆるい集団で、比較的最近生まれたばかりの若い星からできている (図 6・1)。銀河面内に分布するために、銀河星団 (galactic cluster) と呼ぶこともある。また散開星団の中には、よりゆるく結びついたアソシエーション (association) と呼ばれる星の集団もあり、若い OB 型星を含むものを OB アソシエーション (OB association) と呼ぶ。アソシエーションは、しばしば、星落とか群落などと訳される。

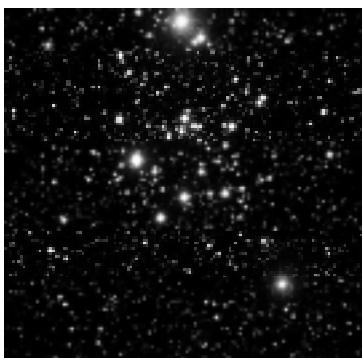


図 6.1 散開星団 M50 (NASA)

後者の球状星団 (globular cluster) は、数万から数十万個の星が半径数十光年から数百光年の球状に集まった星の集団で、その形状から球状星団と呼ばれる (図 6・2)。いままでに 150 個ほど見ついているが、銀河系周辺の八口領域に、全部で 500 個ぐらい存在

していると推定されている。球状星団を構成する星は、非常に年老いた第 1 世代の星であり、球状星団自体が、銀河系の誕生と相前後して生まれた天体である。

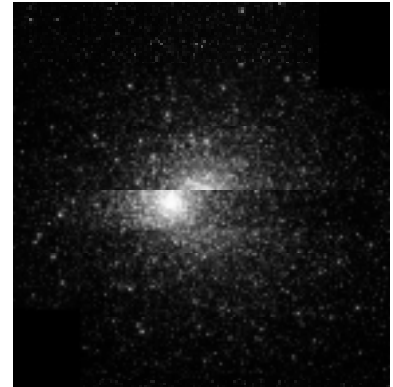


図 6.2 球状星団 M80 (NASA/STScI)

球状星団の質量  $M$  と大きさ  $b$  は、それぞれ、

$$10^5 M_{\odot} \lesssim M \lesssim 10^6 M_{\odot} \quad (6.1)$$

$$50 \text{ 光年} \lesssim b \lesssim 500 \text{ 光年} \quad (6.2)$$

ぐらいである。

### 6.2 球状星団のポテンシャルモデル

単独の星の重力場 (重力ポテンシャル) は、 $-GM/r$  という形をしていて、単独星のまわりでは物体はその重力場を感じながら運動する。多数の星が集まった星団でも、1 個 1 個の星のポテンシャルは同じ形をしている。しかし、その内部や周辺を運動する天体は、それぞれの星のポテンシャルを区別して感じているわけではなく、すべての星のポテンシャルが足しあわされた状態で、星団全体の重力ポテンシャルを感じながら運動することになる。

星団全体のポテンシャルは、個々の星のごく近傍では、それぞれの星の重力場が卓越して凸凹しているだろうが、均してみれば、全体としては、星団を構成する多数の星の分布を反映したなめらかなものになっているだろう。とくに単独の星がつくる重力ポテンシャルと大きく異なる点は、単独星の重力ポテンシャルは中心で無限大に発散する形をしているが、多数の星の分布から決まる星団のポテ

ンシャルは、(星団の中心に星が無数に集まっていな限り)星団の中心で発散する形をしていない。

中心でなめらかな形をした球状星団の重力場を表すポテンシャルには、いろいろあるが、一番簡単なのが、Plummer のモデルである。Plummer のモデルでは、球状星団の全質量を  $M$ 、球状星団の中心からの距離を  $r$  として、星団のポテンシャル  $\phi$  を、

$$\phi = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + b^2}} \quad (6.3)$$

と表す(図6・3)。ここで  $b$  は定数で、球状星団の重力場の有効半径を表す。

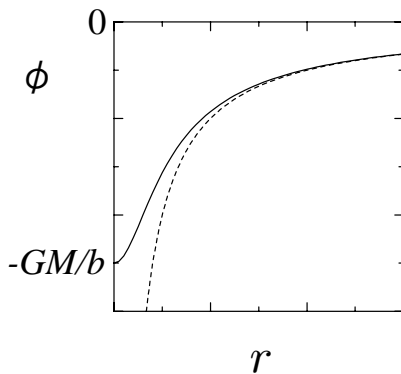


図 6.3 球状星団の重力ポテンシャル

このポテンシャルを  $r$  で微分すると、半径方向の加速度:

$$-\frac{d\phi}{dr} = -\frac{GMr}{(r^2 + b^2)^{3/2}} \quad (6.4)$$

が得られる。したがって、このポテンシャル内における運動方程式は、

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{d\phi}{dr} = -\frac{GMr}{(r^2 + b^2)^{3/2}} \quad (6.5)$$

となる。

またエネルギー積分は、運動エネルギーと上のポテンシャルを加えて、

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{\sqrt{r^2 + z^2}} = E(\text{積分定数}) \quad (6.6)$$

である。

一般的に、上の(6.5)式、あるいはそれを積分した(6.6)を解くのはちょっと面倒なの

で、以下では、ポテンシャルの中心近傍での運動を少し考えてみる。球状星団の中心近傍では、 $r \ll b$  と近似できるので、上の(6.5)式の右辺は以下のように展開・近似できる:

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} &= -\frac{GMr}{(r^2 + b^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{GMr}{b^3(1 + \frac{r^2}{b^2})^{3/2}} \\ &\sim -\frac{GM}{b^3}r \end{aligned} \quad (6.7)$$

この近似した式は、角速度  $\omega$  が、

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{b^3}} \quad (6.8)$$

の単振動の微分方程式で、解は、 $A$  と  $B$  を任意定数として、

$$r = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (6.9)$$

で表される。

すなわち、球状星団の中心近傍では、星は角速度  $\omega$  (したがって、周期  $P = 2\pi/\omega$ ) の振動運動をする。

問 6.1 比較的小さな球状星団 ( $M \sim 10^5 M_\odot$ ,  $b \sim 50$  光年) と比較的大きな球状星団 ( $M \sim 10^6 M_\odot$ ,  $b \sim 500$  光年) について、それぞれ、中心近傍での星の振動の周期を求めよ。

コラム：N 体問題

## 7 銀河の力学

数千億個の星や、大量のガスや塵などの星間物質、そしてその他の物質が集まった巨大なシステムが、銀河 ( galaxy ) である ( 図 7・1 )。太陽系もそのような銀河の一つに属しているが、われわれの太陽系が属している銀河は、他の銀河と区別するために、とくに銀河系 ( The Galaxy ) と呼ぶ ( 天の川銀河とも呼ばれる )。銀河の中には、星やガスのような目に見える物質以外に、銀河には光で観測できない物質、いわゆる暗黒物質 ( dark matter ) が、光で観測できる物質の約 10 倍くらい存在していると考えられている。ここでは、そのような銀河に関する力学の中で、とくに、円盤銀河の回転に関する問題を考えてみる。

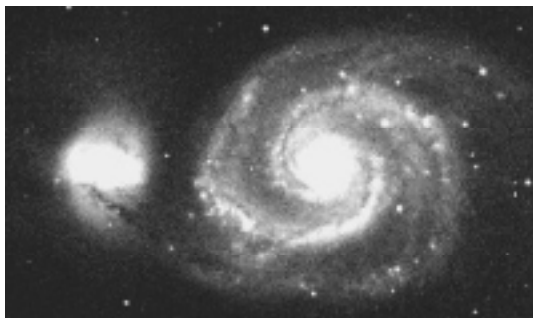


図 7.1 子持ち銀河 M51(大阪教育大学)

### 7.1 銀河の分類

銀河にはいろいろなタイプがあるが、大別して、星が球状 (あるいは楕円体状) に集まった楕円銀河 ( elliptical galaxy )、円盤状に集まった円盤銀河 ( disk galaxy )、不規則な形状をした不規則銀河 ( irregular galaxy )、そして特異な形状を示す特異銀河 ( peculiar galaxy ) などに分けられる。円盤銀河は、しばしば美しい渦巻き状の形状 <グランドデザイン> をもつため、渦状銀河 ( spiral galaxy ) とも呼ばれる。また渦状構造とともに中心部分に棒状の構造を持つものもあり、棒渦状銀河 ( barred spiral galaxy ) と呼ばれる。このような銀河の形態分類を最初に行ったエドウィン・ハッブルにち

なんで、ハッブル分類 ( Hubble classification ) と呼んでいる ( 図 7・2 )。

われわれの銀河系やアンドロメダ銀河は、円盤銀河 / 渦状銀河の一種である。典型的な銀河の質量は太陽の 1 千億倍ぐらい、サイズは 10 万光年程度である。

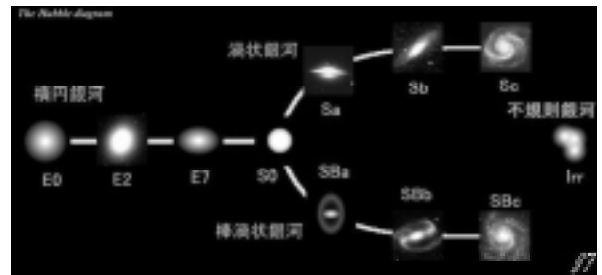


図 7.2 銀河のハッブル分類

銀河とくに渦状銀河は中心のまわりを回転している。たとえば、太陽系は銀河系中心のまわりを約 220km/s の速度で回っており、約 2 億年かけて銀河系を一周する。このような中心のまわりの回転の速度は、銀河の中心からの距離によって異なるのだが、中心からの距離の関数として回転の速度を表したものを回転曲線 ( rotation curve ) と呼んでいる ( 図 7・3 )。回転曲線を調べることによって、銀河の動的な振る舞いや質量の見積もりなどができるのだ。

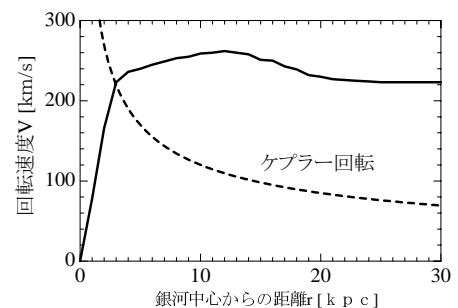


図 7.3 円盤銀河の回転曲線

## 7.2 円盤銀河の回転曲線

コラム：ダークマター

円盤銀河では、銀河をつくる物質の質量がもたらす重力と、中心のまわりの回転による遠心力が釣り合って、平たい円盤状の形状を保っている。銀河の中心から距離  $r$  にある質量  $m$  の星が、中心のまわりを回転速度  $V$  で円運動していたとすると、その星に働く遠心力は  $mV^2/r$  である。一方、この星の公転軌道内(すなわち半径  $r$  の球内)に含まれる物質の質量を  $M(r)$  とすると、この星に働く重力は  $GM(r)m/r^2$  ぐらいになる(物質が球対称に分布していれば厳密に  $GM(r)m/r^2$  になるが、円盤銀河では物質の分布が球対称ではないので  $GM(r)m/r^2$  程度である)。

したがって、重力と遠心力の釣り合いから、

$$\frac{GM(r)m}{r^2} = \frac{mV^2}{r^2} \quad (7.1)$$

となる。あるいはこの式を  $M(r)$  について解くと、

$$M(r) = \frac{rV^2}{G} \quad (7.2)$$

が得られる。すなわち、ある半径  $r$  における銀河の回転速度  $V$  がわかれば、その半径内の質量  $M(r)$  を見積もることができる。

問 7.1 実際の観測では(図 7・4)、銀河の回転速度は、かなりの範囲にわたって、ほぼ一定である。このことは何を意味するか。

問 7.2 実際の観測(図 7・4)にもとづいて、観測されている範囲内の質量を見積もってみよ。

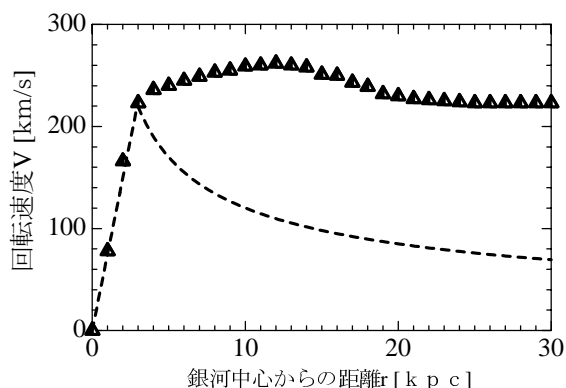


図 7.4 円盤銀河 M31 の回転曲線

## 8 銀河団の力学

数千億の星やその他の物質からなる銀河は、宇宙の中で一様に分布しているわけではなく、しばしば、重力的に結びついた局所的な集団を作っている(図8・1)。そのような銀河集団のうち、十数個の銀河が集まったものを銀河群 (group of galaxies)、数百から数千個の銀河が集まったものを銀河団 (cluster of galaxies) と呼んでいる。銀河団の中の銀河は、写真で見ると静止しているように見えるが、決してひとところにじっとしているわけではなく、思い思いの方向に運動している。ここでは、銀河団の中の銀河の運動を考えてみよう。



図 8.1 かみのけ座銀河団 (NAO)

### 8.1 銀河団の力学質量と光学質量

星や銀河と同じく、銀河団にも名前がついている。たとえば、おとめ座の方向で約 5900 光年の距離にあるおとめ座銀河団は、巨大楕円銀河 M87 などを含む 50 個程度の銀河からなる集団だし、かみのけ座の方向で 3 億光年の彼方には 100 個以上の銀河を含むかみのけ座銀河団がある。

これらの銀河団に含まれる個々の銀河の挙動を調べていた、スイス出身の天文学者フリッツ・ツヴィッキーは、1933 年、奇妙な事実に気づいた。彼はまず、銀河団に含まれる各銀河の明るさを測定した。銀河がふつうの星からできていると仮定すると、星一個の明るさや質量 (の分布) はだいたいわかっているのだから、銀河全体の明るさが太陽何個分に相当するかがわかる。すなわちその銀河の“総質量”が見

積もれる。このようにして求めた質量を光学的質量と呼んでいる。たとえば、かみのけ座銀河団の光学的質量は太陽の数兆倍だった。

一方で、彼は、銀河団に含まれる各銀河の運動の様子を調べた。銀河団中の個々の銀河には、他の残りすべての銀河からの重力が働いているはずだ。一個一個の銀河が銀河団から逃げ出したりしないためには、他の銀河全体からの重力を相殺する程度のほどよい速度で、その銀河が運動していることが必要である(図8・2)。したがって、個々の銀河の運動速度を測定してそれらを平均すれば、銀河団全体の質量を見積もることができる。このような方法で求めた質量を力学的質量と呼んでいる。たとえば、かみのけ座銀河団の各銀河は、だいたい秒速 1000km ぐらいの速度で飛び廻っている。これぐらいの運動速度をつなぎとめるためには、かみのけ座銀河団の質量が太陽の 500 兆倍くらい必要だ、というようなことがわかるのだ。

そしてツヴィッキーをひどく驚かしたことには、求めてみた銀河団の力学的質量は、光学的質量より数十倍から数百倍も大きかったのだ。このことはすなわち、銀河団の中には、光を出さないために目には見えないが、重力作用は及ぼす暗黒の物質ダークマター (dark matter) が大量に存在していることを意味していた。

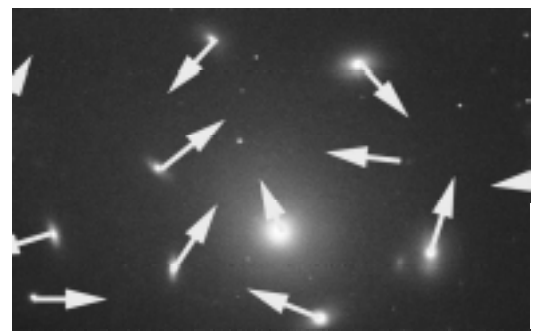


図 8.2 銀河団中の銀河の挙動

### 8.2 ビリアル定理

銀河団は、銀河同士の重力によって結びつけられているが、重力が強すぎて潰れもせず、逆

に弱すぎてバラバラになることもなく、比較的安定な力学的平衡状態になっていると考えられている。力学的な平衡状態で成り立つ巨視的な条件として、ビリアル定理 (virial theorem) が知られている。

銀河団を構成する各銀河の運動エネルギーを足し合わせた全運動エネルギーを  $T$ 、銀河団全体の物質による全重力エネルギーを  $\Omega$  とすると、ビリアル定理は、

$$2K + \Omega = 0 \quad (8.1)$$

のように表される。

銀河団の全質量を  $M$ 、サイズを  $R$ 、各銀河のランダム運動の速度を  $V$  ぐらいとすると、銀河団の銀河の全運動エネルギー  $T$  は、

$$K \sim \frac{1}{2}MV^2 \quad (8.2)$$

程度になり、また銀河団全体の重力エネルギー  $\Omega$  は、

$$\Omega \sim -\frac{GM^2}{R} \quad (8.3)$$

程度である。これらの式を上のビリアル定理の (8.1) 式に代入すると、

$$M \sim \frac{RV^2}{G} \quad (8.4)$$

が得られる。すなわち、銀河団のサイズと各銀河のランダム運動の程度がわかれば、銀河団全体の質量が推定できる。

問 8.1 かみのけ座銀河団には、14.5 等より明るい銀河だけでも 184 個、暗い銀河まで入れると 1000 個以上の銀河が含まれているが、かみのけ座銀河団の赤方偏移は  $z = 0.0232$ 、見かけの広がり約  $1^\circ$ 、各銀河のランダム運動の大きさは約  $900 \text{ km s}^{-1}$  ぐらいである。まず、ハッブルの法則に基づいて、銀河団までの距離が約 2.9 億光年になることを示せ (ハッブル定数  $H = 75 \text{ km s}^{-1}$  とする)。つぎにかみのけ座銀河団の実際の広がりが、約 500 万光年になることを示せ。最後に、ビリアル定理から、かみのけ座銀河団の (力学的) 質量が、太陽質量の 500 兆倍くらいになることを示せ。

コラム：重力レンズ、高温ガス



図 8. c1)



## 9 宇宙の力学

銀河の後退運動や3K宇宙背景放射の存在などさまざまな証拠から、宇宙は150億年ぐらいの昔(最新の値は137億年前)、最初は非常に小さく高温で高圧で高密度の火の玉(fireball)だったものが、急激に膨張して現在に至ったと考えられている(図9・1)。これは時空そのものの急膨張であって、(すでに存在していた空間の中での)ふつうの爆発とはまったく異なるものだ。この宇宙最初の時空の“大爆発”をビッグバン(big bang)と呼び、ビッグバンで始まり膨張してきた宇宙をビッグバン宇宙(Big Bang Universe)という。

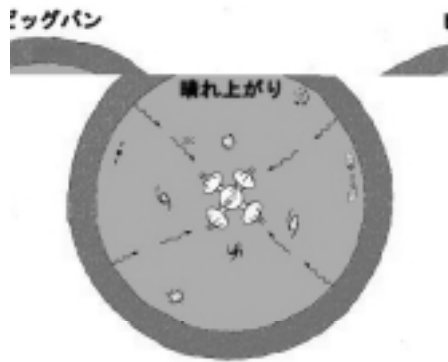


図9.1 ビッグバン宇宙

### 9.1 ハッブルの法則

遠方の銀河のスペクトル線を調べていた天文学者エドウィン・ハッブルは、1929年、(1)大部分の銀河は赤方偏移していること、(2)銀河が暗いほど(すなわち銀河が遠いほど)赤方偏移が大きいこと、に気づいた(図9・2)。銀河の赤方偏移をドップラー効果だと解釈すれば、遠方の銀河ほど赤方偏移が大きいということは、遠方の銀河ほどわれわれから高速で遠ざかっていることを意味する。このことはとりもなおさず、われわれの宇宙が膨張していることを意味していた。この観測事実を、今日、ハッブルの法則(Hubble's law)と呼んでいる。

銀河の赤方偏移を  $z$ 、(明るさから推定された)銀河までの距離を  $r$ 、光速を  $c$  とすると、

ハッブルの法則は、ある“比例定数”  $H$  を導入して、

$$z = (H/c)r \quad (9.1)$$

と表すことができる。また銀河の後退速度  $v$  を  $v = cz$  で定義すると、この式は、

$$v = Hr \quad (9.2)$$

のように表せる。これがふつうに使われるハッブルの法則の形だ。

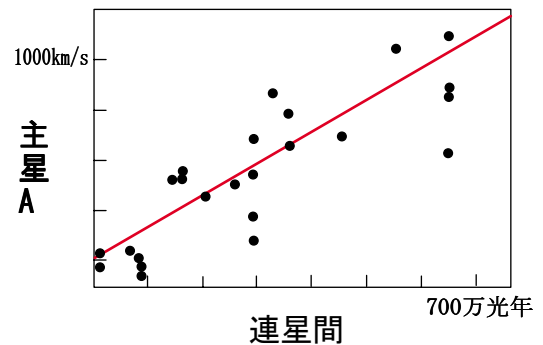


図9.2 ハッブルの法則

このハッブルの法則で現れる“比例定数”  $H$  は、ハッブル定数(Hubble constant)と呼ばれる定数で、宇宙の膨張の程度を表している。すなわち、ハッブル定数は、1Mpc 彼方の銀河の後退速度 [km/s] の目安になっている。現在では、ハッブル定数の値は、

$$H = 71 \pm 4 \text{ km/s/Mpc} \quad (9.3)$$

程度だと推測されている。

### 9.2 膨張宇宙モデル

アインシュタインの一般相対論によって、物質(&エネルギー)と時空構造を関連付けることが可能になった。その式はアインシュタイン方程式と呼ばれている。このアインシュタイン方程式を宇宙全体に適用し、適当な仮定(一様とか等方など)のもとで解くと、種々の相対論的宇宙モデルが得られる。

たとえば、アインシュタイン自身は1917年に静止宇宙モデルを提案している。ただし、その際アインシュタインは、宇宙に存在する

物質の重力に対抗するために、斥力として作用する宇宙項/ラムダ項/宇宙定数 (lambda term / cosmological constant) を付け足した。後年、アインシュタインをして、“生涯最大の過ちだった”と言わさしめたものである。

その後、1922年に、数学者フリードマンが、アインシュタイン方程式(宇宙項なし)を解いて、ずっと膨張している解を発見した。また1927年には、ベルギーの宇宙論学者ルメートルが、アインシュタイン方程式(宇宙項あり)を解いて、やはり膨張している解を発見した。フリードマンやルメートルの発見した膨張解によって表される宇宙が膨張宇宙モデル (expanding universe model) である。

膨張宇宙モデルは、閉じた宇宙、平坦な宇宙、そして開いた宇宙の3通りに分かれる(図9・3)。宇宙の物質密度が十分大きいと、物質の重力を振り切って膨張を続けることができなくなり、宇宙の膨張はやがて収縮に転じる。このときは宇宙空間の曲率は正で宇宙全体の空間構造は閉じているので、閉じた宇宙 (closed universe) と呼ばれる。また宇宙の物質密度がある特定の臨界値 - 臨界密度になっていると、物質の重力と宇宙膨張の勢いがちょうど釣り合った状態になっていて、宇宙膨張は一定の割合で永遠に続く。このときは宇宙空間の曲率はゼロで宇宙全体の空間構造は平坦なために、平坦な宇宙 (flat universe) と呼ばれる。さらに宇宙の物質密度が臨界密度より小さいと、物質の重力作用で膨張を止められないので、宇宙膨張は加速しながら永遠に続く。このときは宇宙空間の曲率は負で宇宙全体の空間構造は開いているために、開いた宇宙 (open universe) と呼ばれる。

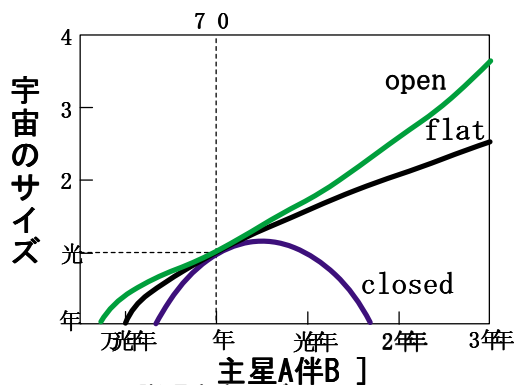


図9.3 膨張宇宙モデル ( $\Lambda = 0$ )

### 9.3 宇宙方程式

ビッグバンモデルを正しく記述するには、一般相対論が必要だが、ニュートン力学的な扱いでも大まかな性質を知ることができる。

宇宙全体の質量を  $M$  とし、宇宙全体の典型的なサイズ (スケールファクターという) を  $a$  としよう。宇宙に含まれる物質の量は変わらないので質量  $M$  は一定だが、宇宙が膨張したりするにつれてスケールファクター  $a$  は時間  $t$  と共に変化する。

ニュートン力学的な扱いでは、このスケールファクターに対して、ニュートンの運動方程式と同じような式が成り立つ。すなわち、膨張宇宙の“運動方程式”は、

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{GM}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} a \quad (9.4)$$

となる。

この(9.4)式の右辺第1項は、宇宙全体の物質が引き合う万有引力を表している。すなわち、宇宙が小さいときは宇宙全体が引き合う万有引力も強く、宇宙が膨張して広がると万有引力は弱くなることを意味している。

また右辺の第2項は、宇宙斥力の項である。ここで  $c$  は光速だが、 $\Lambda$  は宇宙項とかラムダ項とか宇宙定数などと呼ばれる、宇宙空間の斥力の強さを表すある定数である。この宇宙斥力は、空間自体に潜むある種のエネルギーで、最近ではダークエネルギー (dark energy) とも呼ばれているが、その正体はまだわかっていない。しかし、宇宙斥力/ダークエネルギーが存在するとしたら、運動方程式への加わり方は、 $\Lambda$  を定数として、(9.4)式のような形になることが数学的に証明されている。すなわち、宇宙が膨張して広がっても、宇宙斥力の大きさは減ることはなく、逆に、空間のスケールファクターに比例して強くなるのである。

上の(9.4)式を積分すると、宇宙全体に関するエネルギー積分：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \frac{da}{dt} \right)^2 - \frac{GM}{a} - \frac{\Lambda c^2}{6} a^2 &= E \\ &= -\frac{1}{2} k c^2 \end{aligned} \quad (9.5)$$

が得られる。

この(9.5)式の左辺は、第1項が宇宙全体の運動のエネルギー、第2項が宇宙の物質の重力エネルギー、そして第3項が宇宙斥力に伴うある種のポテンシャルエネルギーだと解釈できる。そしてそれらの和が一定ということは、宇宙が膨張したりしても、宇宙全体のエネルギー  $E$  が保存されることを意味している。

ニュートン力学での運動と同じように、宇宙全体のエネルギーが負(束縛運動)か、0か、正(非束縛運動)によって、宇宙全体の運動の様子はわかる。実際、 $E = -kc^2/2$  と置くと、定数  $k$  の値によって、

- $k = 1$   $E$  は負 閉じた宇宙
- $k = 0$   $E$  は0 平らな宇宙
- $k = -1$   $E$  は正 開いた宇宙

にわかる(図9・3、図9・4)。

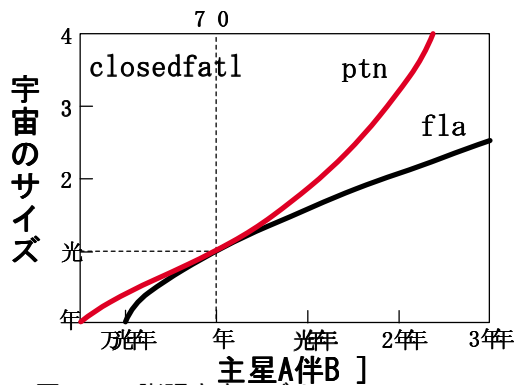


図9.4 膨張宇宙モデル( $\Lambda \neq 0$ )

問9.1 膨張宇宙の運動方程式(9.4)で、宇宙が静止していると仮定して(アインシュタインの静止宇宙)宇宙全体の質量と宇宙斥力を使って宇宙のスケールファクターを表せ。

問9.2 宇宙全体のエネルギー積分(9.5)を導け。

問9.3 ラムダ項が0で、開いた宇宙では、宇宙が無限に広がったときにスケールファクターの速度が光速になることを確かめよ。逆に、そのような境界条件から、 $E = -kc^2/2$  が決められたのである。

問9.4 宇宙項がない( $\Lambda = 0$ )場合、いろいろな  $k$  の値に対して、スケールファクターの運動速度  $da/dt$  のグラフの概形はどうなるか。

問9.5 宇宙項がある( $\Lambda \neq 0$ )場合、いろいろな  $k$  の値に対して、スケールファクターの運動速度  $da/dt$  のグラフの概形はどうなるか。

コラム：宇宙の年齢