

科学の読み書き力

- 0 ガイダンス：ノートの取り方・グラフの描き方
- 1 日常の科学
- 2 科学の体系
- 3 数と単位と次元
- 4 量の変化と微分・積分
- 5 多変数関数の微分と積分
- 6 ベクトル解析
- 7 科学的な調べ方
- 8 科学的な分析
- 9 自然界のモデル化
- 10 封筒裏の計算とフェルミ推定
- 11 科学光学機器の基礎
- 12 科学的な表現

補 相対論入門(未)

補 量子論入門(未)

2018 年 10 月版(ver.3)

大阪教育大学 福江 純

fukue@cc.osaka-kyoiku.ac.jp

0 ガイダンス

講義シラバス

授業科目 科学の読み書き力

キーワード 科学的な考え方、手法、分析、計算、表現

授業の到達目標

自分を取り巻く自然界や事象について、科学的な見方と立場で捉え、取り扱い、そして科学的な根拠で判断できるようにするための基礎を培う。いわゆる科学リテラシー（科学の読み書き能力）を学ぶ。

授業の概要

科学的な考え方を身につけるために、科学の言語である数学（の基礎）や、科学的な調べ方、データ処理の方法、問題の解き方、科学光学機器の基礎、そして科学的な表現などを学ぶ。併せて、ノートの取り方も、ホームワークも含め、しっかりと身につけてもらう。ときおり、息抜きを兼ねて、現代科学の基礎である相対論と量子論も概説する。また2015年度からは、読書を含めたホームワークを課しており、科学英語についても紹介している。なお、科学倫理は扱わない※。

★綴じた大学ノートを使用のこと（ルーズリーフは不可）

★関数電卓やハサミが必要なときがある

授業の計画

傍注参照

成績評価

- (1) 講義前の昼休みに前回の講義ノートを提出（50%前後）
- (2) 随時のホームワーク（+自主的HW）の確認（20%前後）
- (3) 毎週の読書感想文の確認（20%前後）
- (4) 適宜の課題レポート（20%～30%）

参考文献

山下景子『美人の日本語』幻冬舎

柳瀬尚紀『日本語は天才である』新潮文庫

本多勝一『日本語の作文技術』朝日文庫

木下是雄『理科系の作文技術』中公新書

木下是雄『レポートの組み立て方』ちくま学芸文庫

ジェイムズ・D・スタイン『不可能、不確定、不完全』早川文庫

マーカス・デュ・ソーイ『素数の音楽』新潮文庫

スティーヴン・ワインバーグ『電子と原子核の発見』ちくま学芸文庫

リチャード・ファインマン『光と物質のふしぎな理論』岩波現代文庫

フランク・ウィルチェック『物質のすべては光』早川書房

科学の読み書き力 science literacy

科学倫理 science ethics

※科学倫理を取り扱わないことについて。ウソをつかない、人のモノを盗まないといったことは、躰として身につけておくべき当たり前のことだ。このような人の品格にかかわることは、わざわざ講義をしたり、それで身に付くものでもないだろう。

▼授業の計画

0 オリエンテーション：ノート、電卓、はさみ

1 日常の科学

2 科学の体系と科学的な考え方

3 単位と次元：時空の編み目

4 スペシャル：相対論入門

5 微分と積分

6 多変数の微分と積分

7 ベクトル解析

8 スペシャル：量子論入門

9 科学的な調べ方

10 科学的な分析

11 科学的な解き方：自然界のモデル化

12 科学光学機器の基礎

13 科学的な表現：太陽は何色

14 まとめ

福江 純『科学の国のアリス』大和書房
 リチャード・フォーティ『生命 40 億年全史』草思社
 アンドルー・H・ノール『生命最初の 30 億年』紀伊國屋書店
 ニック・レーン『ミトコンドリアが進化を決めた』みすず書房
 ニック・レーン『生命の跳躍-進化の 10 大発明』みすず書房
 カール・セーガン『百億の星と千億の生命』
 川上伸一『生命と地球の共進化』NHK ブックス
 リサ・ランドール『ダークマターと恐竜絶滅』
 福江 純『宇宙のしくみ』日本実業出版社
 福江 純『ブラックホール宇宙』サイエンス・アイ新書
 福江 純『SF アニメを科楽する』日本評論社
 山本 弘『ニセ科学を 10 倍楽しむ本』
 鵜沼 仁『数・式・記号の英語』丸善出版
 Anthony T. Tu『科学英語実用ハンドブック』化学同人

ノートの取り方

半年の講義で、ふつうのノートを取れば大学ノート 1 冊分ぐらいの板書の量になる。しかしながら、少数ではあるが、10 頁かそれ以下しかノートが取れない人も居る。ちゃんとノートが取れる人にとっては今更であろうが、ノートの取り方について、一つの例示をしておきたい。

- ★綴じた大学ノート・キャンパスノートを使うこと
- ★両開きで使い、板書は左側、その他は右側に書くこと
- ★新しい回・項目では頁を改めること
- ★白紙部分が生じても詰めないこと
- ★計算などで間違ったときは、消しゴムで消さずに、赤字で訂正

グラフの描き方

科学的なグラフ（データのプロット）については、きちんと描ける人はほとんど居ない。重要なポイントを箇条書きにしておく。

- ★座標軸には、プロットする量（変数）と単位を明記する。
- ★座標メモリは切りをよくし、同種の物理量なら同じスケールに取る。
- ★データ点は小さな点にせず、差し渡し 5mm 程度の記号で囲む。

理由 1 大きさをもたせて見やすくする

理由 2 フィッティング曲線に埋もれないようにする

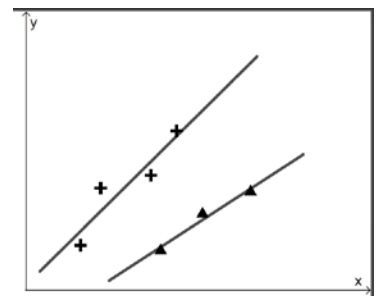
理由 3 異なる種類のデータには違う記号をあてて弁別する

本来の理由：データには必ず誤差が付くので、記号の差し渡しは、本来は誤差を表している。したがって、たとえば、縦軸の誤差が大きければ、縦方向に長い十字や菱形になる。

▼ノートの両開きイメージ

(左頁)	(右頁)
板書	補足メモ
	宿題
	自主活動
	読書感想文等

▼グラフの描き方



グラフを最初に描くのは、おそらくは算数なので、理科で重要な誤差入りグラフの描き方は習わないだろう。現在の学校教育の欠陥でもある。

▼データ点の記号

+ × ○ △ □ ◇

▼グラフの英語

グラフの表題 graph title

原点 origin

枠 frame

横軸 x(horizontal)-axis, abscissa

縦軸 y(vertical)-axis, ordinate

軸の名前 axis label

データ点 data point

太い実線 thick solid line

細い破線 thin dashed line

点線 dotted line

一点鎖線 dash-dotted line, chain dotted line

1 日常の科学

Questions today

空はなぜ青い？

夕焼けはなぜ赤い？

夜空はなぜ暗い？

虹はどうしてできる？

ふだん目にする日常の中には、考えてみればさまざまな不思議がある。外に出てみれば空はなぜ青いのかと思う。夕暮れになれば夕焼けがなぜ赤いのか、夜になればなぜ夜空は暗いのかと考える。霧と雨の違いはどうだろう？ 虹はどのような仕組みで見えるのか？

身の回りの世界には、予想外に多くの不思議が潜んでいる。今回の授業では、日常の中の科学を少し紹介する。

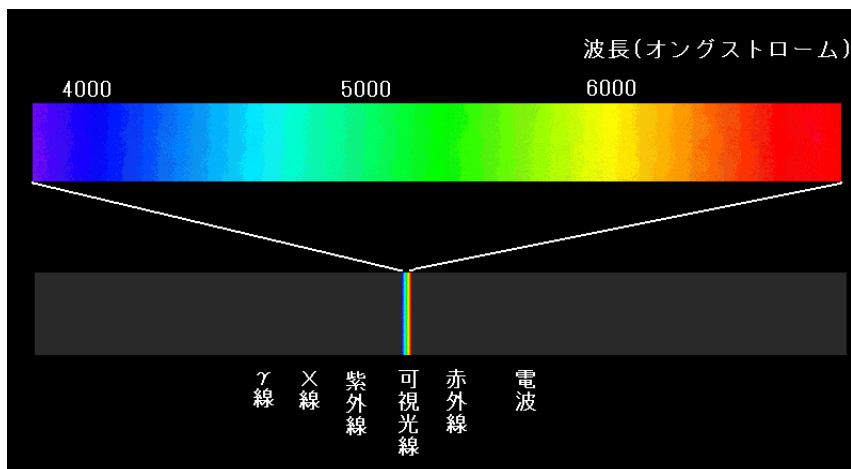
光のスペクトル

目に見える光（可視光）をプリズムなどに通すと、紫から赤までの色に分かれる。日本では、

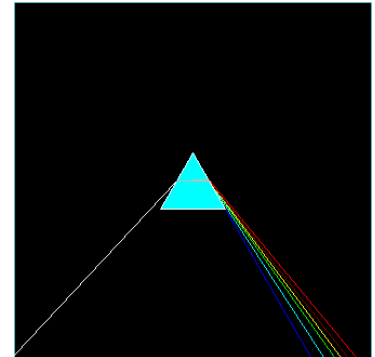
赤橙黄緑青藍紫（せきとうこうりょくせいらんし）

で虹の七色と呼ばれる。光には波の性質があるので、波長と振動数をもち、波長が違う光は違う色に見える。たとえば、赤の波長は780 ナノメートルであり、それより長い波長のものを赤外線という。また、紫の波長は380 ナノメートルであり、それより短いものを紫外線という。

色（波長）に分解された光（の並び）を**スペクトル**（spectrum）と呼ぶ。



可視光のスペクトルと電磁波



光の分解

可視光 visual light

波長λ wavelength

振動数ν frequency

$\lambda \nu = c$ (光速)

▼可視光の波長（めやす）

赤：780 nm～630 nm

橙：630 nm～590 nm

黄：590 nm～565 nm

緑：565 nm～500 nm

青：500 nm～450 nm

藍：450 nm～430 nm

紫：430 nm～380 nm

広い意味では、電波、赤外線、可視光、紫外線、X線、ガンマ線なども“光（の仲間）”で、**電磁波**と総称する。

▼電磁波の波長（めやす）

電波（radio wave）：1 mm 以上

赤外線 IR（infrared）：770 nm～1 mm

可視光（visual light）：380nm～770 nm

紫外線（ultraviolet）：10 nm～380 nm

X線（X-ray）：0.01 nm～10 nm

ガンマ線（gamma-ray）：0.01 nm 以下

Q1 空はなぜ青いのか？

空はなぜ青いのだろう。飛行機に乗って上空で見る空の色は、空色ではなく、ぐっと濃い群青色になる。このことから、空の青色には、太陽光と同時に、空気が重要な役割を果たしていることがわかる。



青空

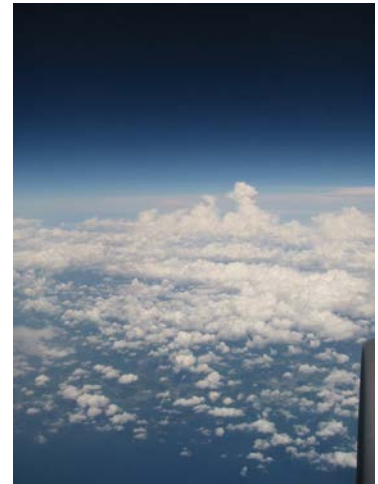
一般に、雨滴やチリや空気分子など、微小な粒子に光線があたると、光線はあちこちの方向にランダムに散乱される。その際、チリなどのように光の波長よりも大きな粒子による散乱では、光の色（波長）に無関係に散乱が起こる。これを**ミー散乱**という。たとえば、霧や霏が白っぽいのはミー散乱のためで、黄砂のときに空が白いのもミー散乱のためである。

一方、空気分子（酸素分子や窒素分子）のように光の波長よりも微小な粒子による散乱では、波長が短い光の方が散乱の度合いが大きい。具体的には、光の波長を λ とすると、散乱の度合いは、 $\frac{1}{\lambda^4}$ に比例する。たとえば、青い光の波長は赤い光の波長の半分程度なので、青い光の方が赤い光より 16 倍も強く散乱されることになる。これを**レイリー散乱**という。晴れた日の青空は、このレイリー散乱によって起こっている。

さて、ここで新たな疑問が生じるかもしれない。可視光では、もっとも波長が短い光は青ではなく紫だった。それなら、なぜ青空は青色であって紫にならないのだろうか。自分で考えてみよう。

Q2 夕焼けはなぜ赤いか？

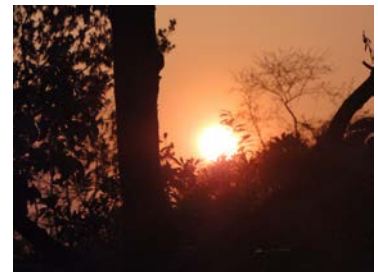
では、夕焼けはなぜ赤いのだろう。晴れた日の空が青く、朝焼けや夕焼けが赤いのは、別々の理由があるわけではなく、同じ現象—散乱—を異なる側面から見ているものだ。



群青色の空



霧で白っぽい朝の空 (2007/0122)



通常の夕焼け (2011/0425) と黄砂の日の夕焼け (2011/0502)

ミー散乱 Mie scattering

レイリー散乱 Rayleigh scattering



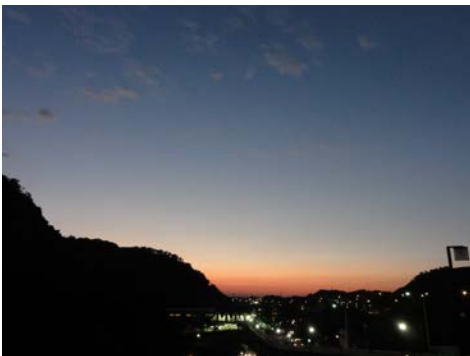
夕日

太陽光は昼と夕方では大気層を突き抜ける距離が異なる。明け方や夕方は太陽の高度が低く地平線近傍になるので、太陽光が大気層に対して斜めに入射し、昼よりも大気層を長い距離通過することになる。太陽光が大気中を長距離通過してくる間に、青い光は散乱されきってしまい、逆に散乱されにくい赤やオレンジの光が残って、赤色が強調され人間の目に届くことになる。一方、途中で散乱された青い光は、よその地方で青空を作っている。

Q3 夜空はなぜ暗いか？

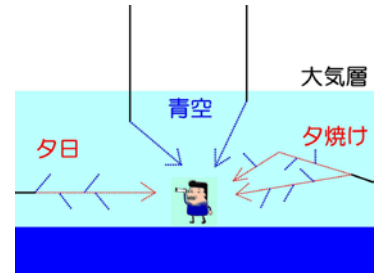
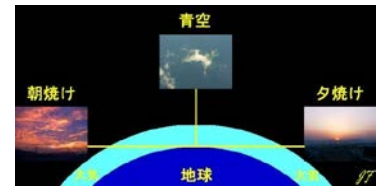
森の中で木を見るとき、木と木の間に木が見え、また木と木の間に木が見え、というようにまわりはすべて木しか見えない。同じように夜空を考えてみると、星と星の間に星が見え、またその星と星の間に星が見えというように、星が無限にあるならば、夜空は星で埋め尽くされるだろう。

宇宙が無限に広がっていて、悠久の過去から永遠に続いており、そして宇宙全体に無数の星々が存在しているとすると、宇宙のどの方向を見てもどこかで必ず星に辿り着くので、夜空も昼間のごとく明るいはずだ。ならば、夜空はなぜ暗いのだろう。この素朴な問いかけは、最初に考察した19世紀の科学者にちなみ「オルバースのパラドックス」と呼ばれている。

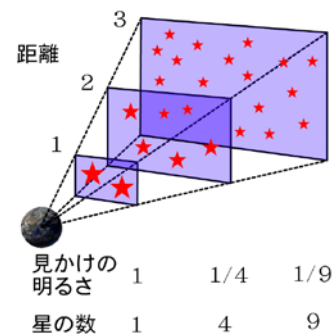


夕暮れのグラデーション

宇宙は138億年前、ビッグバンにより誕生し、ずっと膨張し続けている。宇宙は永久不変に続いてきたわけではないので、星は無限に存在するわけではない。さらに、光速は有限なので、非常に遠方の星（おおざっぱには138億光年より彼方の星）からの光はまだ届いていない。観測できる範囲の星数はさらに少なくなる。その結果、夜空は暗い。



ハインリッヒ・ヴィルヘルム・オルバース (1758~1840)



星1個の明るさは距離の2乗に反比例して減少するが、視野内の星の個数は距離の2乗に比例して増加するので、どの距離でも星夜の明るさは一定になる。

Q4 雨より霧や霽の視界が悪いのはなぜ？

雨滴と霧の水滴の個数を比較してみる。雨滴も霧の水滴も球形と仮定すると、同じ体積の水量で比較すると、直径の3乗に比例して霧の水滴の個数が雨滴の個数より多くなる。光は水滴に入射すると散乱されるため直進しない。雨や霧の中を通る光は雨滴より霧の水滴の方がはるかに多いことから霧の方が光をより散乱させることになる。したがって、雨の方が遠くまで見ることができる。→第10講参照

Q5 虹はどうして見えるのか？

雨上がりの虹は自然現象の中でもっとも美しいものの一つに数えられるだろう。七色の虹は、どのようにしてできるのだろうか。雨上がりや散水時に見えることから、微小な水滴が重要な役割を果たしていることは間違いないだろう。また虹は、太陽の方向にはできず、太陽を背にした方向にできることから、太陽光との位置関係も重要なポイントになるはずだ。



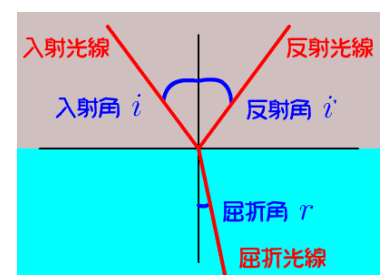
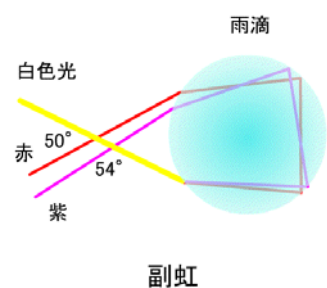
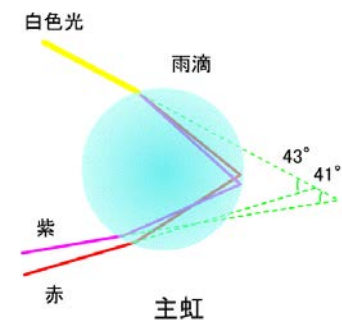
主虹と副虹（2011/0921；屋久島にて）

虹は太陽光が水滴中で屈折・反射して起きる現象である。虹は観測者から見て太陽の真反対である対日点を中心とし、半径約 42° の円上に現れる。ふつうに見られる主虹（しゅにじ）では、内側が青で外側が赤になるが、まれに見られる副虹（ふくにじ）では逆になる。

Report: 虹を設計してみよう

水滴の断面を円とし、円の表面でスネルの法則を用いて、入射光線を屈折させていく。水の屈折率は約1.3である。さらに、赤色光と青色光の違いまで出せるだろうか。

虹 rainbow / L' arc en ciel



スネルの法則

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n$$

入射角 i incident angle

屈折角 r refraction angle

屈折率 n refractive index

赤色光の屈折率 1.331

青色光の屈折率 1.343

2 科学の体系

Questions today

科学で扱えるモノは？

科学で扱えないモノは？

ギリシャ語のアルファベットが書けるか？

β や δ の筆順は？

そもそも科学とはなんだろう。ここでは科学そのものと科学の体系などについて、簡単にまとめておく。

科学の対象

科学で扱えるものと扱えないモノがある。

科学で扱えるものとは、物体の落下や水の蒸発、植物の成長、星の変光などのように、観察や観測によって客観的に測定でき定量化できて、そして再現性があるものである。一方、科学で扱えないモノには、おばけ、空飛ぶ円盤、超能力、心情などがあげられる。これらはいずれも、測定や定量化ができておらず、再現性もないため、現在は科学の対象ではない。

ただし、最近の科学技術によって、たとえば、心情についてはMRIなどを調べることができるようになりつつある。植物状態の人でも脳の精密な測定で、脳の活動状態などが分かるようになってきている。現在は科学の対象ではないモノも、いずれは科学で扱えるようになるかもしれない。

数量化と客観性

測定結果が数値化できること（数量化）と、だれが行っても同じ結果になること（再現性・客観性）は、科学できることの基本である。

科学的な視点の置き方として、対になる言葉を少し並べてみよう。

定量的と定性的: 定量的とは物事の性質を数値を用いて表すことに対し、定性的とは物事の性質を質的な表現のみで表すこと。

客観的と主観的: 客観的とは誰が観察しても同じ結果（事実）と判断されることで、主観的とは自分が観測したことだけで判断すること（意見）で他の誰もが同じ意見をもつとは限らない。

普遍的・一般的と特殊的。

論理的と非論理的・直感的。

実証的と思弁的などもある。

▼科学の対象

地震、天気、天体、地球、食べ物、動物、電気、化学反応

▼科学で扱えないモノ（現時点）

人間の性格、神の存在、宗教、幽霊、空飛ぶ円盤、超能力

▼磁気共鳴撮像 MRI

強い磁石によって、体内にある弱い磁場をもつ水素原子に影響を与え、体内の原子の状態を画像にする装置。

MRI magnetic resonance imaging

数量化 quantification

定量的 quantitative

定性的 qualitative

客観的 objective

主観的 subjective

一般的 general

特殊的 special

論理的 logical

非論理的 illogical

実証的 demonstrative, empirical

思弁的 speculative

科学の源流

近・現代科学は16世紀から18世紀にかけて主にヨーロッパで発展し、20世紀初頭の相対性理論と量子力学の完成をもって、一段落した。もっとも、科学的な思考という観点からは、西洋科学の源流はギリシャ時代の「自然哲学」が発祥地だと考えられる。

ラテン語のスキエンチアはサイエンスの語源であり、サピエンチアはヒトの学名である、Homo sapiens のサピエンスの語源である。前者は知識という意味で、後者は智慧という意味だ。すなわち、科学という言葉は、もともと「知る学問」ということが分かる。

なお、日本語での「科学」という言葉の由来を知っているだろうか。科学の「科」は理科や百科事典などで使われる字である。すなわち、日本では、科学とは「諸科の学問」という意味である。社会・自由・権利、哲学・物理学・化学・天文学などと同様、明治時代に造られた言葉である。

科学の言葉

科学のすべては<数学>という言葉で綴られている。科学と数学が違うところは、科学の一つ一つの数には自然現象の意味があり、単位がつくことだ。たとえば160 cmは長さを表す。

しかし、数学という言葉で綴られた科学の内容を、読み書きし伝えるためには、当然ながら、まずは国語（日本語）の読み書き力が不可欠である。

したがって、“科学の読み書き力”とはつまるところ、

- 1に【国語の読み書き力】、
- 2に【国語の読み書き力】、そして
- 3に【数学の読み書き力】などがあって、そのあとでようやく、
【諸科学の読み書き力】を身に着けることだと捉えて欲しい。

また科学の世界では、数字や英語のアルファベットはもちろんだが、それら以外に、ギリシャ文字を頻繁に使用する。英語のアルファベットは書き順も含め学校でちゃんと習うが、ギリシャ語については習う機会がない。そのため、研究者でも μ と ν を読み違える人が少なくない。また β や δ や σ の書き順を知らない人もいる。

この機会に、ギリシャ語のアルファベット24文字をきちんと覚えること。

$\alpha \beta \gamma \delta \epsilon \zeta \eta \theta \iota \kappa \lambda \mu \nu \xi \omicron \pi \rho \sigma \tau \upsilon \phi \chi \psi \omega$

$A B \Gamma \Delta E Z H \Theta I K \Lambda M N \Xi O \Pi P \Sigma T Y \Phi X \Psi \Omega$

ほとんどの小文字は一筆で書く。たとえば、 β は左下から書き始めて円を描くように右側を書く（13のように分けて書かない）。 δ は円の上から反時計回りに描いて上の右端で止める。 σ は円の上から右回りに描いて上の髭を延ばす（左回りに描いて髭を後から付けない）。

ギリシャ語	episteme	sophia
ラテン語	scientia	sapientia
英語	knowledge	wisdom
日本語	知識	智慧

▼ギリシャ語のアルファベット

大文字	小文字	読み方	用例
A	α	アルファ	α 線、赤経 α
B	β	ベータ	β 崩壊
Γ	γ	ガンマ	比熱比 γ
Δ	δ	デルタ	微小量 Δ 、赤緯 δ
E	ϵ	イプシロン	偏平率 ϵ
Z	ζ	ゼータ	Zガンダム
H	η	エータ	効率 η
Θ	θ	シータ	極角 θ
I	ι	イオタ	
K	κ	カッパ	吸収係数 κ
Λ	λ	ラムダ	波長 λ 、宇宙項 Λ
M	μ	ミュー	μ 中間子
N	ν	ニュー	振動数 ν
Ξ	ξ	クシー	無次元化変数 ξ
O	$\omicron$	オミクロン	くじら座 $\omicron$ 星
Π	π	パイ	円周率 π
P	ρ	ロー	密度 ρ
Σ	σ	シグマ	定数 σ
T	τ	タウ	固有時間 τ
Y	υ	ウプシロン	
Φ	ϕ	ファイ	方位角 ϕ
X	χ	カイ	h - χ 星団
Ψ	ψ	プサイ	ポテンシャル ψ
Ω	ω	オメガ	角速度 Ω

いうまでもないことだが、“アルファベット”という言葉自体が、 α と β から来ている。

α	β	γ	δ	ϵ
アルファ	ベータ	ガンマ	デルタ	イプシロン
ζ	η	θ	ι	κ
ジータ	イータ	シータ	イオタ	カッパ
λ	μ	ν	ξ	$\omicron$
ラムダ	ミュー	ニュー	クシー(クサイ)	オミクロン
π	ρ	σ	τ	υ
パイ	ロー	シグマ	タウ	ウプシロン
ϕ	χ	ψ	ω	
ファイ	カイ	ブサイ	オメガ	

科学の手法

ギリシャ文明は紀元前 800 年ごろからはじまり、紀元前 146 年にローマ帝国に征服されるまで続いた。実用主義のローマ時代には科学は軽視され、さらにキリスト教の影響もあり、ヨーロッパにおいて科学は廃れた。しかし、その間、ギリシャ科学はアラビア圏で温存された。アルゴリズムやアルコール、アルデバランやアルタイルなど、アル（アラビア語の定冠詞・接辞）がつくものはアラビア圏で命名されたものである。

たとえば、エジプトのアレキサンドリアでは、古代ギリシャ文化がヘレニズム文化として開花し、古代ギリシャの学問的伝統も保存され、科学と学問の一大研究施設ムセイオン、学問の女神ムーサ（ミューズ）の展堂も建設された。ムセイオンは博物館の語源でもある。このアレキサンドリアで、2 世紀に活躍した天文学者プトレマイオスは、ギリシャ時代の知識体系を 4 冊の大著で集大成した。その成果は、西欧社会に逆輸入され、コペルニクスが現れるまで、1400 年の長きにわたって、西洋科学を支配する中心的教義となっていく。

▼アラビア語由来の用語

algebra 代数学
algorithm アルゴリズム
azimuth 方位角
alchemy 錬金術 (→化学)
alcohol アルコール
alkali アルカリ
albatross あほうどり
almanac 暦

Alhambra アルハンブラ
Aldebaran アルデバラン
Altair アルタイル
Deneb デネブ
Fomalhaut フォーマルハウト
Gibraltar ジブラルタル
Vega ベガ

プトレマイオス (Clausius
Ptolemaeus : 90?~170)

ニコラス・コペルニクス (Nicolaus
Copernicus : 1473~1543)

16 世紀の科学者ガリレオ・ガリレイ (Galileo Galilei ; 1564–1642) は、思弁や論証が中心だったギリシャの自然哲学と異なり、実験と観察によって、モデルを検証した。たとえば、ガリレオは振り子の実験や斜面の実験などをした。これを**実証科学**という。実証科学はまた、現代科学の基本的手法でもある。

科学の過程

科学的理解の多くは、自然現象の観察・観測からはじまり、収集したデータの中に何らかの規則性や法則性を見出し、その規則性や法則性を再現するモデルを構築して、そのモデルが新たな現象を予測できるかどうかで検証されていく。その典型例を以下に示す。

①自然現象のデータを収集する。

ティコ・ブラーエは、星座の中における火星の動きを目視で観測し、変な動きをすることを発見した。

②エッセンスを抽出して、データの規則性・法則性を見出す。

ヨハネス・ケプラーは、ティコが収集した火星のデータをもとに、惑星の運動に関するケプラーの法則を導いた。

③モデル化と理論の構築を行い、物理的解釈をし、新しい予測をたてる。

アイザック・ニュートンは、ケプラーの法則にもとづき、万有引力の法則を発見した。アインシュタインの登場までこの後 300 年はニュートンの考え方をもとに科学が発展していく。

Homework: 言葉の源流を調べてみよう

峠・榊・畑・辻・風など、日本で造られた漢字を「国字」という。他にどんなものがあるだろうか。

江戸時代に造られた惑星や地球、西洋科学が急入した明治時代に造られた社会や科学など、日本で造られた漢字の熟語を「和製漢語」という。他にどんなものがあるだろうか。

Homework: 科学の過程の例を調べてみよう

植物の葉・遺伝や化学反応などで、科学の過程の例を調べてみよう。

Exercise: 星のスペクトル分類

収集データに規則性を見出す演習として、19 世紀の天文学者になったつもりで、星のスペクトル分類に挑戦してみよう。図は、17 個の星のスペクトルだ。バラバラに並べてあるので、見かけのパターンがちぐはぐになっている。全体の明るさや黒い縦筋（吸収線）のパターンができるだけスムーズに移り変わるように、並べ直してみたい。30 分ぐらいは根気よく頑張ること。これは観察眼がモノを言う問題なので、専門家でも間違えるし、高校生でもパーフェクトに並べることがある。

ガリレオ・ガリレイ (Galileo Galilei : 1564~1642)

実証科学 experimental science

ティコ・ブラーエ (Tycho Brahe : 1546 ~1601)

ヨハネス・ケプラー (Johannes Kepler : 1571~1630)

アイザック・ニュートン (Isaac Newton : 1643~1727)

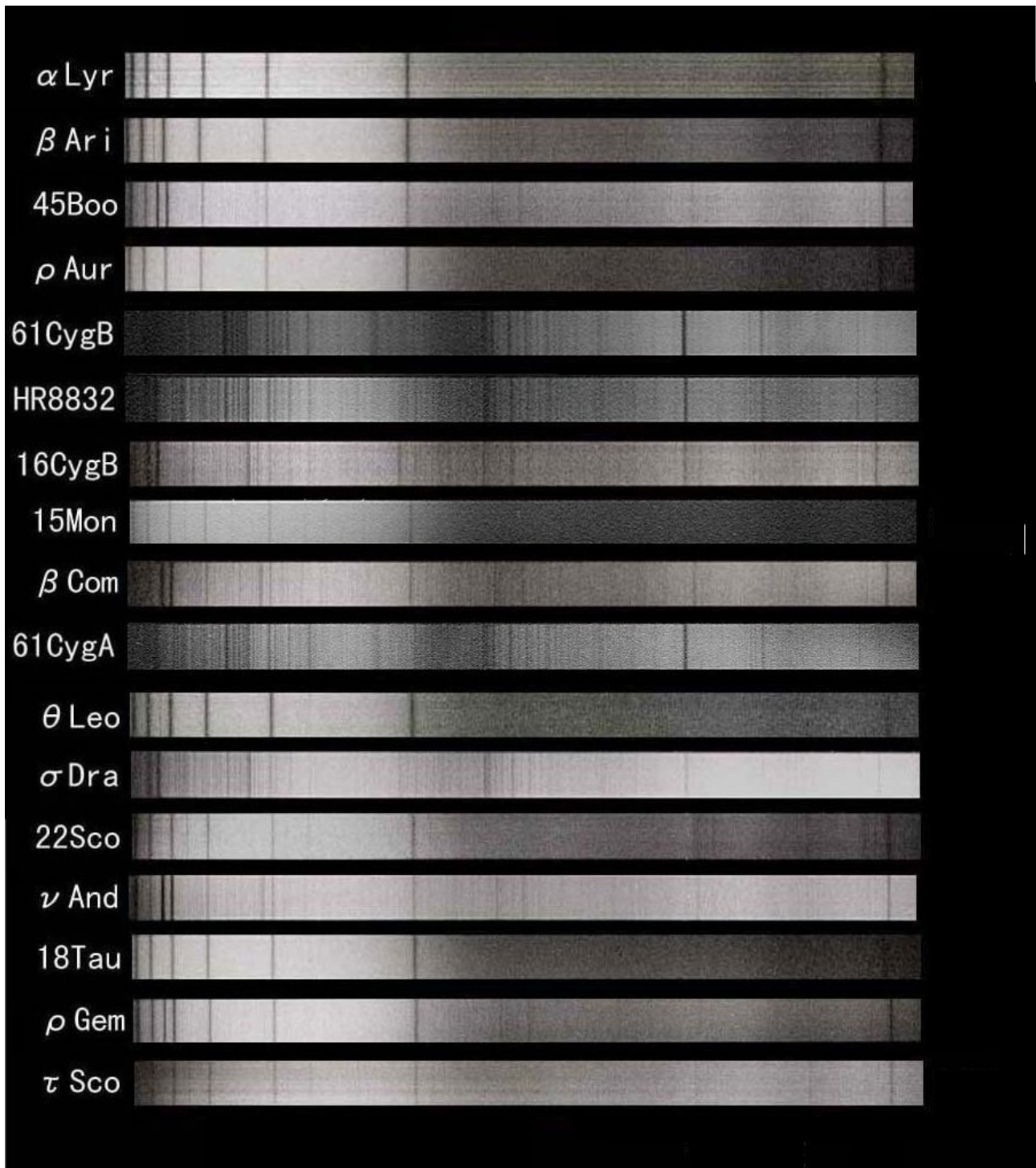
▼要素還元主義 vs 全体論

複雑な対象（たとえば、人体、宇宙、物質）を、各部分（各臓器、銀河、原子）に分割し、さらに基本要素（細胞、星、クォーク）まで分割していった、要素の仕組みや動きを調べることで、全体を理解しようとする方法論が要素還元主義。要素還元主義は現代科学の基本的な方法論だが、要素間のネットワークが重要なこともわかってきて、全体は全体として捉える全体論も併用されるようになった。部分の集合が全体ではないということで、例を挙げれば、人体（全体）を 60 兆個の細胞（部分）に分割することはできても、60 兆個の細胞を集めたモノが人体にはならないということである。

要素還元主義 reductionism

全体論 holism

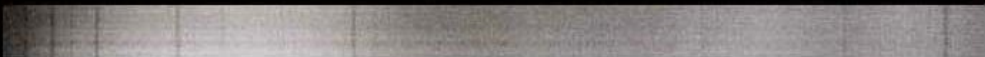
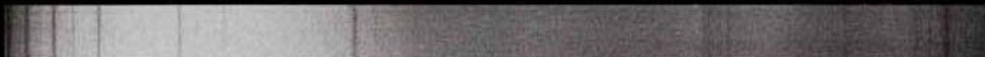
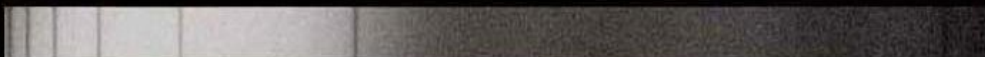
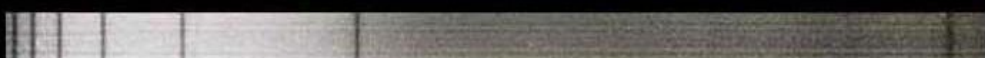
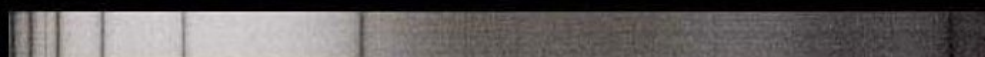
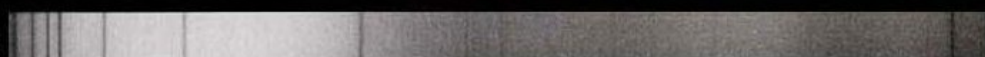
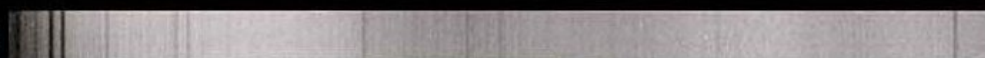
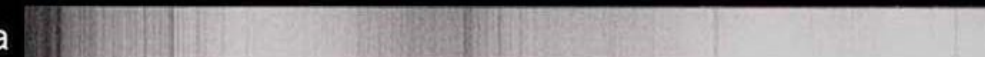
Question



第1ヒント：一番上は15Mon、一番下は61CygB

第2ヒント：全体に共通している黒い縦筋のパターンで手詰まりになったら、他の縦筋の変化に目を向ける

Answer

15Mon		O7 V
τ Sco		B0 V
22Sco		B2 V
ρ Aur		B5 V
18Tau		B8 V
α Lyr		A0 V
θ Leo		A2 V
β Ari		A5 V
ρ Gem		F0 V
45Boo		F5 V
ν And		F8 V
β Com		G0 V
16CygB		G5 V
σ Dra		K0 V
HR8832		K3 V
61CygA		K5 V
61CygB		K7 V

3 数と単位と次元

Questions today

以下の計算は自信をもってできる？

指数の計算 $4 \times 10^6 + 10^7 =$

指数の計算 $4 \times 10^6 \times 10^7 =$

有効数字 $31.4 + 2.0 =$

有効数字 $31.4 \times 2.0 =$

数学について基本をおさらいし、数学で扱う数・量と、自然現象で扱う数・量の違いを説明しておく。

数学を英語で表現すると？

英語では下記の式はどのように読むのだろうか。

$$2+3=5$$

$$2-3=-1$$

$$2 \times 3 = 6$$

$$2 \div 3 = 0.66$$

$$x = 2.72 \times 10^9$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

指数と有効数字

数値表現の中で、科学的な計算でしばしば出てくるもので、とくに注意が必要なものが指数表示と有効数字の問題である。

・指数表示

$$4 \times 10^6 + 10^7 = 1.4 \times 10^7 \quad \text{指数部分を揃えて足す}$$

$$4 \times 10^6 \times 10^7 = 4 \times 10^{13} \quad \text{指数部分を足すだけでよい}$$

$$3.14 + 2.0 = 5.1 \quad \text{和と差は、小数点以下の桁を小さい方に揃える}$$

$$3.14 \times 2.0 = 6.2 \quad \text{積と商は、数値全体の桁を小さい方に揃える}$$

※ $3.14 \times 2.0^* =$ を計算すると*のため、値が決まらない。

・有効数字

ただ、300 と書いたのではどこまでが有効数字が不明なので、

$$3.0 \times 10^2 ; 3.00 \times 10^2$$

のように、わざわざ指数表示にして、有効数字を明示する。

なお、指数表示にしたとき、小数点のついた数値部分を**ファクター**（因子）、指数部分を**オーダー**（桁）と呼び分ける。

▼数式は文章の一部

文章中の数式はもちろん、改行した（立てた）数式にも、つぎの段落に続くときはコンマを、そこで終わるときはピリオドをつける。

Two plus three is equal to five.

Two minus three equals minus one.

Two times three is equal to six.

Two multiplied by three is six.

Two over three equals o point 66.

Two divided by three is

x equals two point seven two times ten to the ninth power.

x equals minus b plus-minus the square root of b squared minus 4ac over 2a.

$$a > b$$

a is greater than b.

$$a \leq b$$

a is less than or equal to b.

a^2 : a squared

a^3 : a cubed

a^4 : a to the fourth (power)

a^{-4} : a to the minus four

$a^{1/3}$: a to the one-third

ファクター factor

オーダー order

指数関数・対数関数・三角関数のおさらい

【指数】

$$10^a$$

【指数関数】

$$y = 10^x \quad (10 \text{ を底})$$

$$y = e^x \quad (\text{自然対数を底})$$

$$= \exp(x)$$

【対数】

$$\log_{10} a$$

【対数関数】

$$x = \log_{10} y$$

$$= \log y \quad \text{常用対数}$$

$$x = \log_e y$$

$$= \ln y \quad \text{自然対数}$$

関数 function

$f(x)$: f of x

指数 exponent

対数 logarithm

自然対数 natural logarithm

指数関数 exponential function

対数関数 logarithmic function

自然対数の底 (ネイピア数)

base of natural logarithm

Napier's constant

$e=2.71828$

記号 $\ln$ の n は自然 (natural) より

Exercise: 指数関数と対数関数のグラフ

指数関数と対数関数のグラフを描いてみよう。ちゃんと描けるだろうか。

グラフからもわかるように、

$$y = e^x \quad x^2, x^3 \text{ よりもはるかに大きく変化する}$$

$y = \ln x$ なかなか大きくならず、大きな数を表現するときに役立つという性質がある。

◦指数関数 e^x の実例 放射性物質の崩壊 (半減期など)

$$y = y_0 e^{-kt}$$

◦対数関数 $\log x$ の実例 水素イオン指数 pH

$$\text{pH} \equiv -\log_{10} \frac{[\text{H}^+]}{\text{mol/L}} \quad [\text{H}^+]: \text{水素イオン濃度 (mol/L)}$$

$[\text{H}^+] = 10^{-7} \text{ mol/L}$ のとき $\text{pH} = 7$ となり中性

【三角関数】

$$y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$$

【逆三角関数】

$$x = \sin^{-1} y, \quad x = \arcsin y$$

pH power of Hydrogen

対数スケールになるものは、地震のマグニチュード、音の強さのデシベル、音階 (1 オクターブで 2 倍周波数が違う)、星の明るさの等級など、他にも多い。

三角関数 sinusoidal function

Exercise: 三角関数と逆三角関数のグラフ

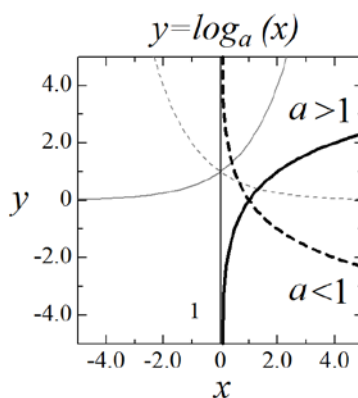
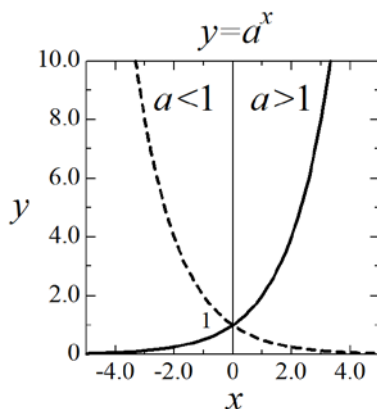
三角関数と逆三角関数のグラフを描いてみよう。

知っての通り、三角関数は周期関数なので、周期的な自然現象の場面では頻繁に出現する。また自然現象の解析でもよく登場する。

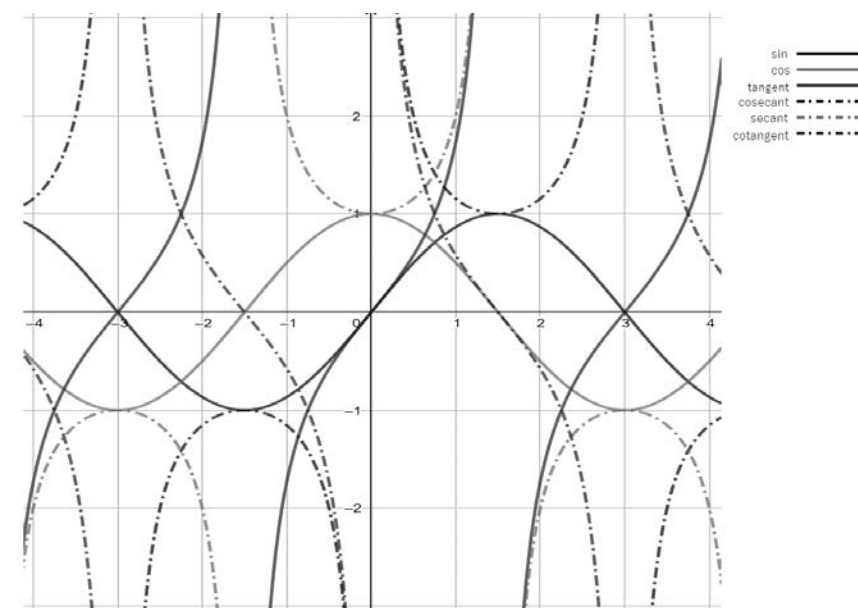
◦三角関数 $y = \sin x$ の実例 波の式

$$f = A \sin(kx - \omega t),$$

$$f = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right)$$



指数関数と対数関数（逆関数の関係になっている）



三角関数

Report/Homework: 自然現象を対数グラフに並べる

自然界のさまざまな事物を $\log R - \log M$ 図（半径と質量の対数グラフ）にプロットしてみよ。

▼その他の数学記号

- ~ is similar to (とほぼ同じ)
- $\propto$ is proportional to (比例する)
- ∞ infinite (無限大)
- $\therefore$ therefore (それゆえ)
- $\equiv$ equivalent (定義)
- $\sqrt{\quad}$ root (根号)
- $\sqrt{2}$ the square root of 2

▼定数や変数の記号（シンボル）

英語の綴りの頭文字が、定数記号や変数記号になることが多いので、英語の綴りを知っておくと、それだけで記号の意味がわかることも少なくない。

▼定数や変数の書体（フォント）

通常定数や変数はイタリック体

光速 c 、万有引力定数 G

半径 r 、速度 v

ただし、ギリシャ語は立体

円周率 π 、角度 θ

ベクトルはボールド体

力 F 、速度ベクトル $\mathbf{v}$

また、単位も立体

距離 10 km

スクリプト（筆記体）や花文字もある

筆記体 $\mathcal{R}$

$\mathcal{R} \mathcal{C} \mathcal{D} \mathcal{E} \mathcal{F} \mathcal{G} \mathcal{H} \mathcal{I} \mathcal{J} \mathcal{K}$

$\mathcal{L} \mathcal{M} \mathcal{N} \mathcal{O} \mathcal{P} \mathcal{Q} \mathcal{R} \mathcal{S} \mathcal{T}$

$\mathcal{U} \mathcal{V} \mathcal{X} \mathcal{Y} \mathcal{Z}$

上記のルールは添え字にも適用

F_i が i 番目の力なら i はイタリック

イオンにかかる力なら i は立体

物理量と単位と次元

自然界に存在する事物や対象に関する量で、原理的には測定が可能であり、一般的には数量化して表現できる量を**物理量**と呼ぶ。観測可能という意味で、**オブザーバブル**ということもある。

数学で扱う数との違いは、物理量は必ず単位（次元）をもち、

物理量＝数＋単位

という形で表現されることである。またここでいう次元とは、3次元空間などの数学的次元の意味ではなく、単位を包括するような、個々の物理量の属性を表す**物理的次元**というものである。

〈単位と次元の違い〉

	単位	次元
[長さ]	m, cm, mile, 尺	L (Length)
[質量]	kg, g, 貫	M (Mass)
[時間]	s, 時	T (Time)
[角度]	°, ラジアン	O (次元としては 0)

Exercise: SI 単位系の基本単位

SI 単位系の基本単位を挙げよ。

Exercise: SI 単位系の組立単位

SI 単位系の組立単位、N (ニュートン)、J (ジュール)、W (ワット) を、基本単位で表してみよ。

公式の活用法

自然科学で出てくる公式の両辺は物理量なので、当然、単位は同じになる。したがって、単位がわからないとき、公式の両辺の単位を比べれば、わからない単位を導ける。

例1 力の単位 N がわからない ⇒ 加速度の公式

力＝質量×加速度

$$F = ma$$

$N = \text{kg m/s}^2$ であることがわかる。

例2 万有引力定数 G の単位がわからない ⇒ 万有引力の法則の式

力＝G×質量×質量／距離²

$$ma = F = -\frac{GMm}{r^2}$$

G の単位＝[G]＝N m²/kg² であることがわかる。

物理量 physical quantity

オブザーバブル observable

単位 unit

次元 dimension

▼SI 単位系

メートル法に準拠して、1960 年、パリで開催された第 11 回国際度量衡学会で採用された国際単位系。

SI 単位系 Le Systeme International d' Unites

▼SI 単位系の基本単位

長さ m (メートル)

質量 kg (キログラム)

時間 s (秒)

電流 A (アンペア)

温度 K (ケルビン)

物質량 mol (モル)

光度 cd (カンデラ)

▼SI 単位系の組立単位の例

力 N (ニュートン) = kg m s⁻²

エネルギー J (ジュール) = kg m² s⁻²

仕事率 W (ワット) = J/s = kg m² s⁻³

▼単位は半角あけて立体で表記する

10 km、10000 K、

▼複数の単位をつけるときは注意

kg m s⁻² ◎

kg m/s² ○

kg・m/s² ○

kg m/s/s ×

次元解析

高度な数学や専門的な物理を知らなくても、物理量の次元を上手に組み合わせるだけで、世界の基本量を見積もることが可能になる。その極めて強力な手法を**次元解析**と呼んでいる。具体例として、ブラックホールのサイズと時空の基本スケールを導いてみよう。

まず基礎定数の次元は以下となる。

光速の次元 $[c] = \text{LT}^{-1}$

万有引力定数の次元 $[G] = \text{L}^2\text{LT}^{-2}\text{M}^{-1} = \text{M}^{-1}\text{L}^3\text{T}^{-2}$

プランク定数の次元 $[h] = \text{ML}^2\text{T}^{-2} = \text{ML}^2\text{T}^{-1}$

例1 ブラックホールのサイズ

質量 m のブラックホールのサイズには、まずブラックホールの質量 m (次元 $[m] = \text{M}$)が関係するだろう。また重力場だから万有引力定数 G が関係し、光さえ出られないから光速 c も関わるはずだ。 G と c と m を組み合わせることで長さの次元をもつ量が作れば、それがブラックホールのサイズと関係するだろう。

Exercise: ブラックホールのサイズ

G と c と m を組み合わせることで長さの次元をもつ量を作ってみよう。

ヒント：最初に Gm という組み合わせの次元を考えてみよう。

G と c と m を組み合わせることで長さの次元をもつ量を作ってみると、唯一、

$$\left[\frac{G \times m}{c^2} \right] = \frac{\text{L}^3\text{T}^{-2}}{\text{L}^2\text{T}^{-2}} = \text{L}$$

という組み合わせが可能である。実際、

$$r_g = \frac{Gm}{c^2}$$

は、ブラックホールの重力半径と呼ばれる量で、球対称なシュバルツシルト・ブラックホールの半径の半分に等しい。

Exercise: 脱出速度

質量が M で半径が R の天体表面から速度 v で打ち上げられたとき、天体の重力を逃れて無限遠まで到達するために必要な速度を脱出速度と呼ぶ。脱出速度が光速に等しくなる条件から、質量と半径の関係を求めてみよう。

次元解析 dimensional analysis

▼光速

光の速度。真空中の光速は自然界でもっとも速い速度になる。

$$c = 3.00 \times 10^8 \text{ [m/s]}$$

▼万有引力定数

物体に働く重力の強さを表す定数。

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ [Nm}^2\text{kg}^{-2}\text{]}$$

▼プランク定数

ミクロな世界における物事の離散状態（とびとびの状態）の最小単位を表す定数。プランク定数が0の極限で物理状態は連続的になり、量子力学は古典力学に帰着する。

$$h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ [J} \cdot \text{s]}$$



映画『インターステラー』より

重力半径 gravitational radius

脱出速度 escape velocity

例2 時空のプランクスケール

現代物理学（量子力学）の考え方では、時間や空間そしてエネルギーなどは連続的な物理量ではなく、非常にミクロなスケールでは飛び飛び（離散的）だと信じられている。時間の最小スケールを**プランク時間**、空間の最小スケールを**プランク長さ**などと呼び、これらを**プランクスケール**と総称する。時空間はプランクスケールのメッシュで織り上げられた不確定な織物で、つねにゆらいでおり、プランクスケールでは因果律さえ成り立っていないだろう。このような時空の構造に対しては、光速度 c 、万有引力定数 G 、そしてプランク定数 h が関係しているだろう。 G と c と h を組み合わせた物理量は、時空を表す量になるだろう。

Exercise: プランクスケール

G と c と h を組み合わせて長さの次元をもつ量を作ってみよ。また時間の次元をもつ量を作ってみよ。

ヒント：最初に Gh/c^3 という組み合わせの次元を考えてみよ。

G と c と h を組み合わせて長さの次元をもつ量を作ってみると、唯一、

$$l_p = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}}$$

のみが長さの次元になる。これがプランク長さだ。同様に、

$$t_p = \sqrt{\frac{Gh}{c^5}}$$

のみが時間の次元をもつ量になる。これがプランク時間である。

具体的な数値を入れてみると、

$$l_p = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}} = \sqrt{\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 6.63 \times 10^{-34}}{(3 \times 10^8)^3}} \cong 4.0 \times 10^{-34} \text{ [m]}$$

$$t_p = \sqrt{\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 6.63 \times 10^{-34}}{(3 \times 10^8)^5}} = 1.3 \times 10^{-43} \text{ [s]}$$

が得られるだろう。光は1プランク時間で1プランク長さ進む！

GoldenWeek Report: サイエンスデザイン

だれも見ることがないモノを描いて着色せよ。ただし、科学的に考察した説明（科学考証）をつけること。

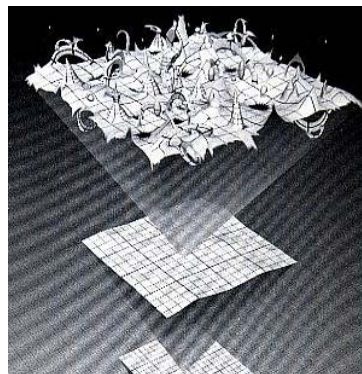
GoldenWeek Present: 読書

毎週の小説やコミックとは違うガッシリした本、たとえば、科学書や日本語の本などを読み、レポート用紙1枚で書評をまとめること。手書き、図1、2枚を入れても可。

プランク時間 Planck time

プランク長さ Planck length

プランクスケール Planck scale



プランクスケールで眺めた時空イメージ

(<http://scribol.com/science/physics/>)

▼その他のプランクスケール

プランク質量

$$m_p = \sqrt{\frac{hc}{G}} = 5 \times 10^{-5} \text{ [g]}$$

プランクエネルギー

$$E_p = \sqrt{\frac{hc^5}{G}} = 5 \times 10^{16} \text{ [erg]}$$

▼プランクスケール同士の関係

$$l_p / t_p = c$$

$$t_p \times E_p = h$$

$$l_p \times m_p c = h$$

最初は光速、後の2つは不確定性原理を意味する。

▼プランクスケールでの光速

プランクスケールでの光速は1。さらに、万有引力定数やプランク定数も1になる。

▼書評

感想や粗筋ではなく、本の内容を評価し論じること。

4 量の変化と微分・積分

Questions today

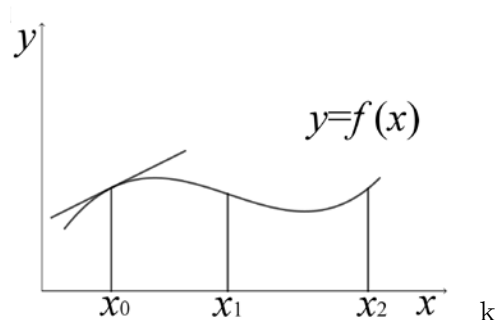
基本関数の微積分は覚えているか？

科学を表現する言葉は数学である。これから数回は、微分、積分、偏微分、多重積分、そしてベクトル解析など、多少へビーな話題が続くので、自然現象への応用例で具体的なイメージを掴んで欲しい。

まず今回は、前半は高校数学レベルの微積分の復習で、後半は簡単な微分方程式と応用を紹介する。併せて、それらの科学英語にも触れる。

関数の微分と積分

一変数 (x) の単純な関数 (y) は、 $y = f(x)$ と書き表される。自然現象を表す関数は、多くの場合、どこでも微分可能な連続関数である。



【微分】 <微分は傾き！>

任意の x における導関数は、 $\frac{dy}{dx} f'(x) \dot{f}(t)$ のように表される。

特定の点 x_0 における微分係数は、 $f'(x_0) \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$ のように表される。

【積分】 <積分は足し算！>

不定積分は、 $F(x) = \int f(x)dx$ のように表される。ここで、 $F(x)$ は原始関数、 $f(x)$ は被積分関数と呼ばれる。

定積分は、 $F = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$ のように表される。ここで、 x_1 と x_2 は積分の下限と上限である。

Exercise: 基本関数の微分と積分を思い出してみよう

基本関数と、その微分および積分を書き出してみよ。

関数・函数 function

$y=f(x)$: y equals f of x.

微分 differentiation, derivative

微分の differential

微分する differentiate

導関数 derivative

微分係数 differential coefficient

$dy/dx=3$: dy dx equals three.

$y'=dy/dx$: y prime equals dy dx.

y'' : y double prime

積分 integration, integral

積分の integral

積分する integrate

不定積分 indefinite integral

定積分 definite integral

原始関数 primitive function

被積分関数 integrand

IC integrated circuit 集積回路

IR interated resort 統合型...

$\int f dx$: the integral of f dx

$f'(x)$ はライプニッツが使い始めた。また、 $\dot{f}(t)$ はニュートンの時間微分によく使われる。

▼積分記号

積分記号の $\int$ は英字の S (sum)

を引き延ばした形からきている。

基本関数	微分	積分
x^n	nx^{n-1}	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ (ただし $n \neq -1$)
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\log x $
e^x	e^x	e^x
e^{ax}	ae^{ax}	$\frac{1}{a}e^x$
a^x	$a^x \log a$	$\frac{a^x}{\log a}$
$\log x$	$\frac{1}{x}$	$x \log x - x$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\log \cos x $

テイラー展開

任意の関数 $f(x)$ は、ある点 ($x=a$) の近傍で無限級数の和に展開できる。この方法 (の一つ) が **テイラー展開** で、無限級数を **テイラー級数** と呼ぶ。

テイラー展開では以下のように級数に展開される。

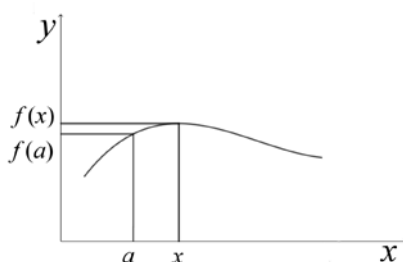
$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \\
 &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots \\
 &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2} (x-a)^2 + \dots
 \end{aligned}$$

テイラー展開を使うと、 $x \ll 1$ のときに、 $\sin x$, $\cos x$, e^x をそれぞれ以下のように展開でき、 x が小さいときの近似解が得られる。

$$\begin{aligned}
 \sin x &\approx x - \frac{1}{6}x^3 \dots, \quad \cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 \dots \\
 e^x &\approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \dots
 \end{aligned}$$

Homework: テイラー展開

上記を確認するとともに、いろいろな関数のテイラー展開をしてみよ。



x^n : x to the nth (power)

$1/x$: one over x

x^{-1} : x inverse

a^x : a to the xth (power)

オイラーの公式 Euler' s formula

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

微分

$$ie^{i\theta} = -\sin \theta + i \cos \theta$$

オイラーの等式 Euler' s identity

$$e^{i\pi} = -1$$

オイラーの等式は、自然対数の底 (ネイピア数) e と虚数単位 i と円周率 π を結びつける単純な数式で、しばしばもっとも美しい数式と呼ばれる。

レオンハルト・オイラー (Leonhard Euler : 1707~1783)

テイラー展開 Taylor expansion

テイラー級数 Taylor series

▼その他の例

$x \ll 1$ のとき、

$$(1+x)^a \approx 1+ax$$

$$(1-x)^a \approx 1-ax$$

$$\log(1+x) \approx 1+x$$

微分の例：さまざまな速度

【物理】位置、速度、加速度

位置 $x(t)$

速度 $v(t) = \frac{dx}{dt}$

加速度 $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

たとえば、一定加速度 g における自由落下運動だと、鉛直方向下向きを y 軸として、 $a = \frac{d^2y}{dt^2} = g$ が立式される。この微分方程式を初速 0 で解

いて、 $v = \frac{dy}{dt} = gt$ が得られ、さらに初期位置 0 で積分して、 $y = \frac{1}{2}gt^2$ が得られる。

【化学】化学反応速度

次のような化学反応を考える。

分子 A + 分子 B → 分子 P

化学反応速度は濃度 $[A]$ による。希薄溶液で分子同士が衝突する割合が化学反応率（化学反応速度）になることから、化学反応速度 v [$\text{mol L}^{-1} \text{s}^{-1}$] は以下のように書ける。

$$v = -\frac{d[A]}{dt} = -\frac{d[B]}{dt} = \frac{d[P]}{dt}$$
$$= k[A][B]$$

ここで、 k [$\text{L mol}^{-1} \text{s}^{-1}$] は速度定数である。

【生物】細菌の増殖速度

好条件のもとでは大腸菌は 20 分に 1 回分裂する。このときの増殖速度は、 $v = 1\text{回}/20\text{分}$ となる。また細胞の個体数が 2 倍になる時間を世代時間 t_0 と定義すると、時刻 $t=0$ における初期細胞数を N_0 として、時刻 t における細胞数 N は、 $N = N_0 2^{t/t_0}$ と表される。

【地学】

大陸移動の速度 = $\text{cm} \sim 10\text{cm}/\text{年}$ （髪の毛の伸びる速度程度）

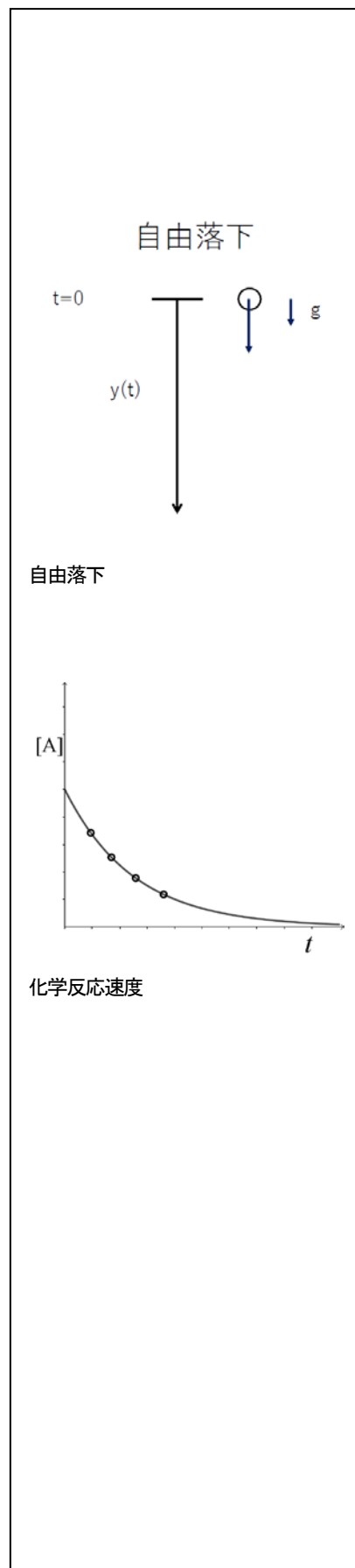
雨滴の終端速度 = 1.2cm/s （半径 $10\mu\text{m}$ のとき）

宇宙の膨張速度 = 68km/s （326 万光年の距離で）

= 時速 75m （1 光年の距離で）

Exercise: その他の例

いろいろな分野での微分を使った量を調べてみよ。



積分の例：曲線の長さ（線積分）

曲線の長さは曲線に沿った微小な直線を足したものと考えるとよい。

$$L = \int_{x_1}^{x_2} ds \leftarrow \sum \Delta s$$

直角座標を使うと、 $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ なので、

$$\begin{aligned} L &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{dx^2 \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} \right)} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx \end{aligned}$$

と導かれる。

例 円周の長さ

原点を中心とする半径 r の円について、 xy 座標系では以下ようになる。

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ y &= \sqrt{r^2 - x^2} \quad (\text{上半分のみ}) \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \end{aligned}$$

これらを使って、円の長さを求める。

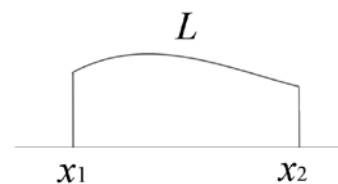
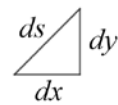
$$L = \int_{-r}^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = \int_{-r}^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx$$

ここで、変数変換 $x = r \sin \theta$ 、 $dx = r \cos \theta d\theta$ とすると、積分範囲は、 $-r \leq x \leq r$ ($-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$) と変換され、以下となる。

$$L = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r \cdot r \cos \theta}{r \cos \theta} d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r d\theta = \pi r$$

以上より、上半分の円周の長さが求まった。

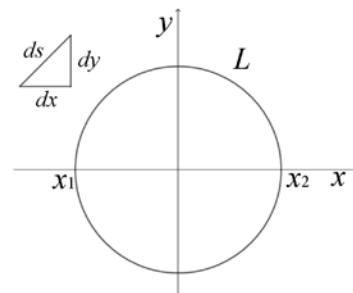
関数の形がわかっていれば、この線積分の方法で曲線の長さを計算できる。また線積分の考え方を使えば、凸凹したものの周の長さを出すときは、細かく切って足し合わせればよいこともわかる。



曲線の長さ

x と y が媒介変数表現の場合

$$\begin{aligned} L &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{dt^2 \left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} \right)} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \end{aligned}$$



円周の長さ

積分の例：面積

面積の場合は細い短冊の面積を足し合わせたものと考えたとよい。

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \leftarrow \sum f \Delta x$$

例 円の面積

直角座標 (x, y) から極座標 (r, θ) への変換を使うと、

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

となるので、

$$\begin{aligned} S &= \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \\ &= \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r \cos \theta \, r \cos \theta d\theta \\ &= r^2 \left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2} \pi r^2 \end{aligned}$$

となり、円の上半分の面積が求まったことになる。

例 円の面積2

円の場合には、小学校で図形的に面積を求めたときのように、菊のように円を細い三角形で分割すると、円の面積は簡単に出る。円の半径を $r = a$ とすると、極座標では、三角形の底辺の長さが a 、高さが $a d\theta$ なので、以下のようなになる。

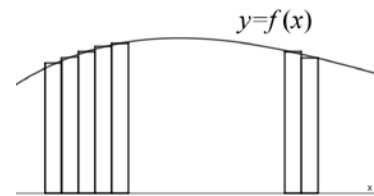
$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} a^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \pi a^2 \end{aligned}$$

Exercise: 葉の周囲の長さをもとめる

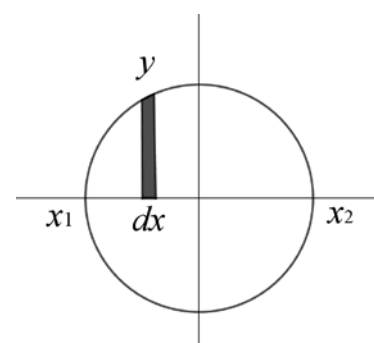
周囲が凸凹した葉の、周囲の長さを求める方法を考えてみよ。

Exercise: 葉の面積をもとめる

周囲が凸凹した葉の、面積を求める方法を考えてみよ。



曲線の下での面積



円の面積

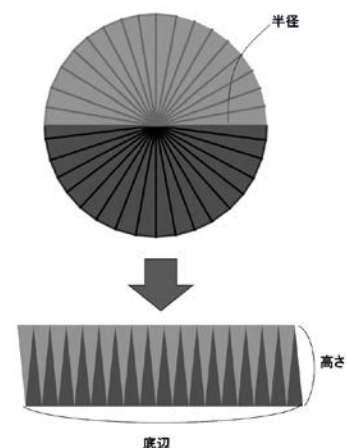
サイクロイド

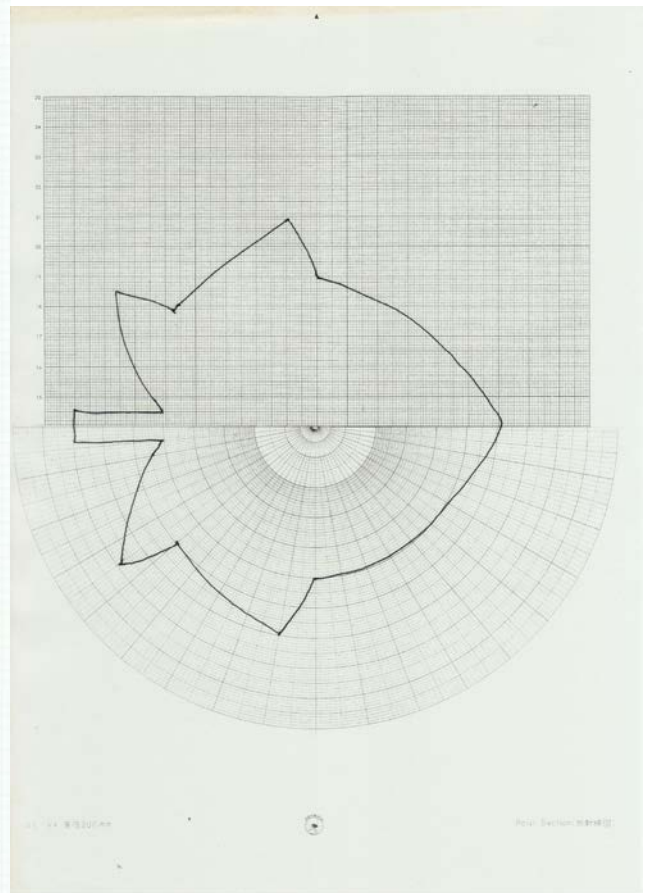
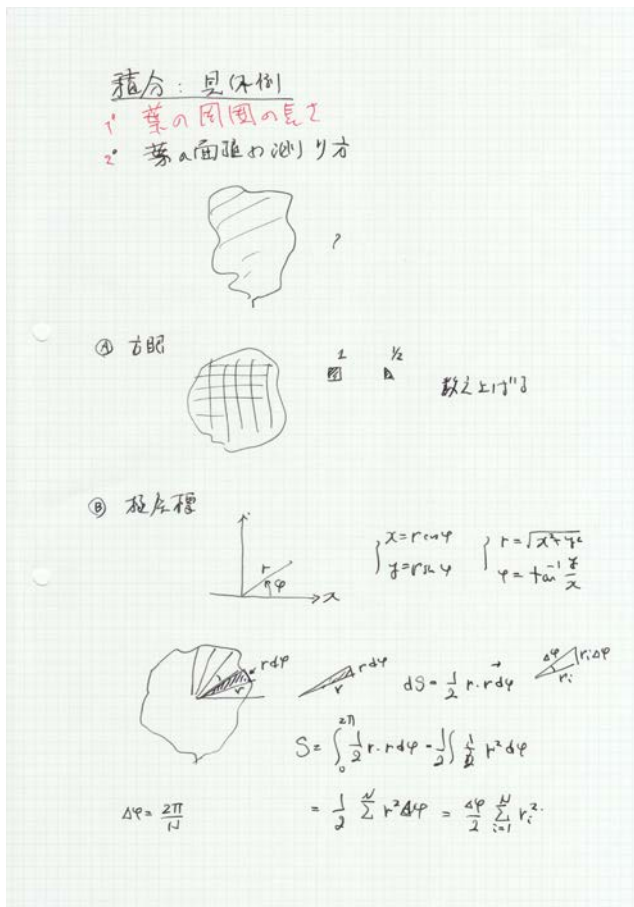
$$x = a(\theta - \sin \theta)$$

$$y = a(1 - \cos \theta)$$

$$\text{長さ } l = 8a$$

$$\text{面積 } S = 3\pi a^2$$





葉の周囲の長さは折れ線にして繋ぐ。

葉の面積は、

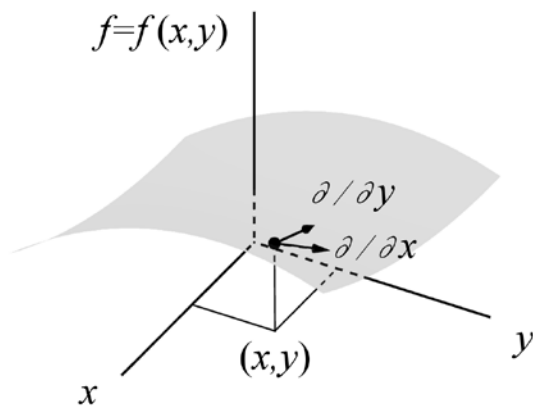
- 方眼で数え上げる
- 極座標で足し合わせる

5 多変数関数の微分と積分

Questions today

地形の等高線で傾斜が急なところは？
気圧の等高線を描いたことはある？

独立変数が 2 つ以上ある関数を**多変数関数**という。たとえば、 $z = f(x, y)$ は x と y の 2 変数の関数 z である。通常、自然現象は縦横高さの 3 次元空間で起こるので、自然現象を表現する物理量は一般には 3 つの空間座標を独立変数とする多変数関数になっている。さらに時間変化まで考えれば、4 つの時空間座標を独立変数とする多変数関数になる。1 変数の関数と異なり、多変数関数の微分や積分は、偏微分および重積分になる。



偏微分 <微分は傾き！！！>

ある独立変数（たとえば x ）に関して偏微分する際は、他の変数（たとえば y ）は固定して微分する（定数とみなす）。ある変数（たとえば x ）の偏微分は多変数関数の曲面上では、その変数軸（たとえば x 軸）方向の曲面の傾きに対応している。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

多重積分 <積分は足し算！！！>

曲面の下で体積は以下の多重積分で求められる。

$$V = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dx dy = \iint h(r, \theta) r dr d\theta$$

多変数関数 multivariable function

常微分 ordinary differential

偏微分 partial differentiation
partial derivative

重積分 multiple integral

多重積分 multiple integration

偏微分に対して、1 変数関数の通常の微分を常微分と呼ぶ。また、常微分の微分記号 d はかたい微分、偏微分の微分記号 ∂ はやわらかい微分ということがある。

常微分記号

ordinary differential symbol

偏微分記号

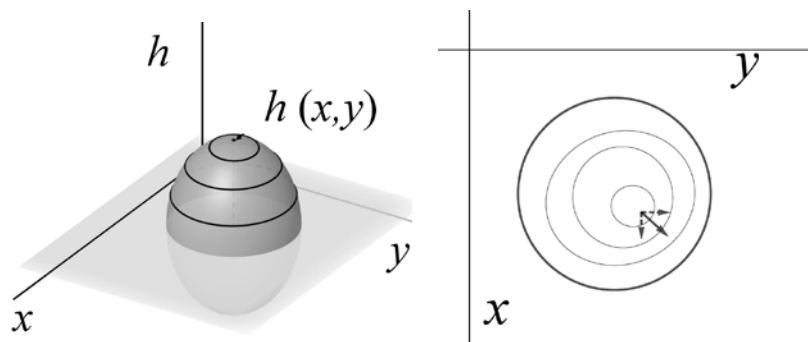
partial differential symbol

∂ の読み方

round d, del

偏微分の例：等高線と傾斜

地形の等高線図や気圧の等圧線図は、典型的な多変数関数のグラフになっている。等高線の密なところが地面の傾斜がもっとも急なことは知っているだろう。関数の微分が図形的には関数を描いたグラフの勾配（傾き）であったことから予想できるように、等高線を表す多変数関数の偏微分は地形の勾配になっている。



高さ h が直角座標 (x, y) の関数 $h(x, y)$ だとする。このとき、高さの微小変化量は、図形的に考えればわかるように、 x 方向の h の変化量は $\Delta h = \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x$ 、 y 方向の h の変化量は $\Delta h = \frac{\partial h}{\partial y} \Delta y$ となる。さらに、 x 方向と y 方向の両方を合わせた変化量（全微分）は、 $\Delta h = \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial h}{\partial y} \Delta y$ である。

高さの偏微分が地形の勾配を決めるので、各点での偏微分を成分とする、

$$\nabla h = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right)$$

というベクトルを**傾斜ベクトル**と呼ぶ。

Exercise:

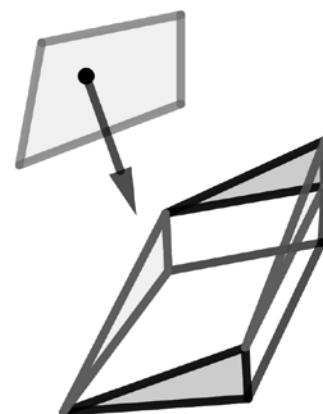
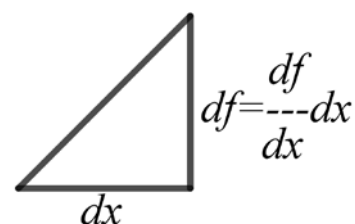
傾斜ベクトルの大きさと方向を求めよ。

多変数関数とその勾配ベクトルは、科学のさまざまな場面で使われる。

例	高さ関数	傾斜ベクトル
物理	電磁ポテンシャル	電磁力
	重力ポテンシャル	重力
化学	濃度分布	濃度勾配
地学	気圧分布	気圧勾配

等高線 contour

全微分 total derivative



傾斜ベクトル gradient vector

▼微分演算子ナブラ

傾斜ベクトルについての記号は、偏微分を成分とする一種のベクトルで、

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

と定義される微分演算子ベクトルである。この記号 ∇ はナブラ (nabla) と読むが、ギリシャの竖琴に似ていることに由来する。

偏微分の例：重力と重力ポテンシャル

ニュートンの万有引力の法則は1次元では、

$$\frac{F}{m} = g = -\frac{GM}{r^2} = -\frac{d\phi}{dr}$$

と表される。ここで、 g は重力加速度で、 ϕ は $\phi \equiv -\frac{GM}{r}$ と定義される重力ポテンシャルである。マイナスの符号を別にすれば、重力ポテンシャルが高さ関数、重力加速度が傾斜ベクトルに相当する。

多変数関数の偏微分を使うと、即座に3次元へ拡張できる。すなわち、

$$\phi = -\frac{GM}{r}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

と直角座標で表せば、重力および重力加速度のベクトルを

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z), \quad \mathbf{g} = (g_x, g_y, g_z)$$

と置いて、重力加速度ベクトルと重力ポテンシャルの関係は以下となる。

$$\frac{\mathbf{F}}{m} = \mathbf{g} = -\nabla\phi \quad g_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x}, g_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y}, g_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

具体的に x 成分を求めると以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{F_x}{m} = g_x &= -\frac{\partial\phi}{\partial x} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{GM}{r} \right) \\ &= GM \frac{\partial}{\partial x} r^{-1} \\ &= GM \left(-\frac{1}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x \\ &= -\frac{GMx}{r^3} \\ &= -\frac{GM}{r^2} \frac{x}{r} \end{aligned}$$

ここで、 $r^{-1} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$, $r^{-3} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$ である。

同様に、

ニュートンの万有引力の法則

Newton's law of
(universal) gravitation

重力 gravity, gravitation

重力加速度

gravitational acceleration

重力ポテンシャル

gravitational potential

重力波（浮力による流体の波）

gravity wave

重力波（時空のゆらぎの波）

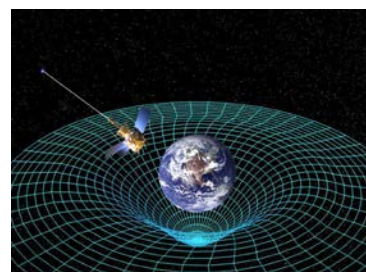
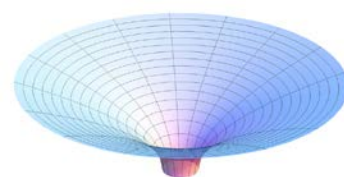
gravitational wave

▼ベクトルのフォント

高校まではベクトルを矢印で表現するが、大学では、ベクトルの書体は通常、太字で表す（添え字も使う）。

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t), v_i(r_i, t)$$

手書きの場合は、文字の縦線や斜め線を2重にして表す。



重力場 (NASA)

$$\begin{aligned}
\frac{F_y}{m} = g_y &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} \\
&= -\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{GM}{r} \right) \\
&= GM \frac{\partial}{\partial y} r^{-1} \\
&= GM \left(-\frac{1}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y \\
&= -\frac{GM y}{r^3} \\
&= -\frac{GM}{r^2} \frac{y}{r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{F_z}{m} = g_z &= -\frac{\partial \phi}{\partial z} \\
&= -\frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{GM}{r} \right) \\
&= GM \frac{\partial}{\partial z} r^{-1} \\
&= GM \left(-\frac{1}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2z \\
&= -\frac{GM z}{r^3} \\
&= -\frac{GM}{r^2} \frac{z}{r}
\end{aligned}$$

Exercise: 電場と電位

電場と電位についても同じ関係が成り立つことを確認せよ。

Homework: 力の大きさを計算して確認せよ

$$\begin{aligned}
\frac{F}{m} &= \frac{1}{m} \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \\
&= \frac{GM}{r^2}
\end{aligned}$$

になるはず!!

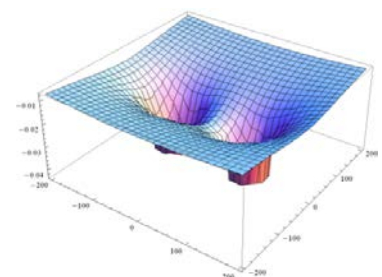
3次元の多変数関数になると、 ∇ の
値が見えてくるが、

$$\begin{aligned}
g_x &= -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \\
g_y &= -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \\
g_z &= -\frac{\partial \phi}{\partial z}
\end{aligned}$$

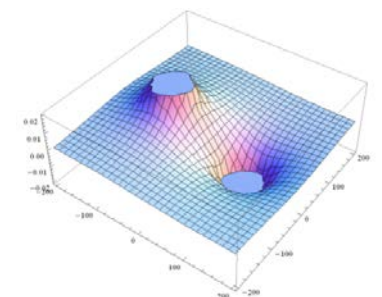
という3本の式を、

$$\frac{\mathbf{F}}{m} = \mathbf{g} = -\nabla \phi$$

という1本の式で表すことができる
から美しい!!



2つの同符号の電荷のポテンシャル



2つの異符号の電荷のポテンシャル

偏微分の例：偏微分方程式

微分を含む方程式を一般に微分方程式というが、とくに1変数関数でかいた微分を含むものを**常微分方程式**、多変数関数で偏微分を含むものを**偏微分方程式**と呼ぶ。常微分方程式で表される自然現象は多いが、偏微分方程式で表される現象はさらに多種多様である。常微分方程式の例については、また改めて紹介するし、科学の読み書き力として、簡単な常微分方程式ぐらいいは解けるようになって欲しい。ここでは自然現象における代表的な偏微分方程式を紹介するが、以下のような自然現象が偏微分方程式で表されるのだということと、例示する解がたしかに偏微分方程式を満たしていることなどを確認して欲しい。

【拡散方程式】

水にインクを垂らしたときのインクの広がる様子（微小粒子の拡散）、物質中の熱運動の伝播（熱伝導）、雲や恒星大気での光子の伝播（散乱）など、多くの場面で拡散型の微分方程式が現れる。

インクなどの拡散を考えると、物質の濃度 c [kg m^{-3}] が x 軸方向の時間 t が経過するにつれてどのように変化するかを表す拡散方程式は、

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

と表される。ただしここで、 D [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$] は拡散係数である。



インクの拡散 (<http://www.flowillustrator.com/fluid-dynamics/basics/>)

【熱伝導方程式】

拡散型の方程式である熱伝導方程式は、温度を $T(x, t)$ として、

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

と表される。ただしここで、 K [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$] は温度伝導率である。

焼け火箸 (<https://blog.goo.ne.jp/mirojoan/>)



微分方程式 differential equation

常微分方程式 O.D.E.

ordinary differential equation

偏微分方程式 P.D.E.

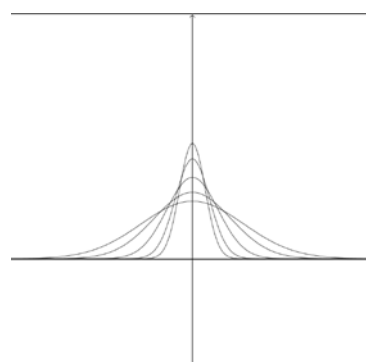
partial differential equation

フィックの法則

Fick's law of diffusion

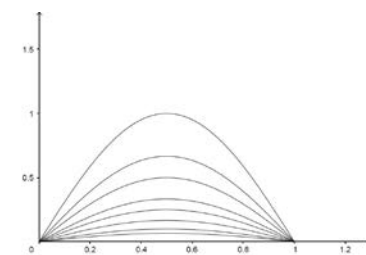
物理量の勾配に物理量の流率が比例する

拡散方程式 diffusion equation



中心から拡散で広がる様子

熱伝導方程式 heat conduction eq



両端を 0K にした棒が冷却する様子

▼【ポワソン方程式】

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 4\pi\rho$$

【波動方程式】

ギターの弦の振動、音、交流電流、水の波、地震波、光（電磁波）など、自然界には多種多様な波がある。波を表す物理量（変位）を $f(x, t)$ とすると、波動方程式は、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

と表せる。ここで、 c は波の速さである。

この波動方程式の解、すなわち波は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} f(x, t) &= A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) \\ &= A \sin(\omega t - kx) \quad \Rightarrow A e^{i\omega t - ikx} \end{aligned}$$

ここで、 A は波の振幅、 λ は波長、 T は周期、 $k = 2\pi/\lambda$ は波数、 $\omega = 2\pi/T$ は角振動数である。また波の速さ c は、 $\nu = 1/T$ を振動数として、 $c = \lambda\nu = \lambda/T$ となる。

この解が波動方程式を満たすことを確認してみよう。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \omega A \cos(\omega t - kx)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\omega^2 A \sin(\omega t - kx) = -\omega^2 f$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (-k) A \cos(\omega t - kx)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -(-k)^2 A \sin(\omega t - kx) = -k^2 f$$

これらを $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ に代入すると、

$$-\omega^2 f = -c^2 k^2 f$$

$$c^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$$

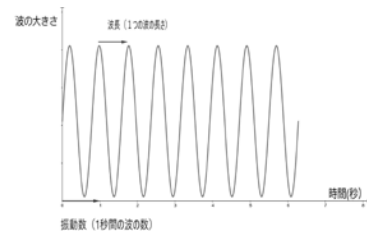
$$c = \pm \frac{\omega}{k} = \pm \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\lambda}{2\pi} = \pm \frac{\lambda}{T}$$

Exercise: 確認

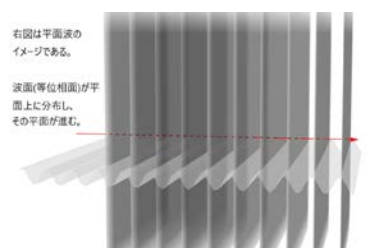
上の確認をせよ。



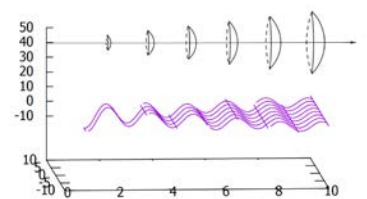
波動方程式 wave equation



波長と振動数（周波数）



平面波



球面波



衝撃波 (<http://rooziato.com/>)

衝撃波も波の一種だが、非線形な波なので、単純な三角関数では表せない。

多重積分の例：表面積（面積分）

曲面の面積は曲面上の微小面積要素を足し合わせたものと考えたとよい。

$$S = \int dS \leftarrow \sum \Delta S$$

例 球面の面積

原点を中心とする半径 r の球について、 xyz 座標系では以下のようになる。

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ z &= \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \quad (\text{上半分のみ}) \end{aligned}$$

また球面状の微小面積要素 dS と、それを xy 平面に射影した微小面積要素 $dxdy$ の関係は、 dS が極角 θ だけ傾いており、 $\cos \theta = z/r$ なので、

$$dS = dxdy \frac{1}{\cos \theta} = dxdy \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$$

となる。これらを使うと、球の上半分の、さらに 1/4 の面積は、

$$\frac{1}{4} S = \int dS = \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} dxdy$$

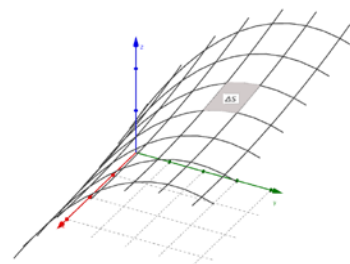
と表される。ここで、 $y = \sqrt{r^2 - x^2} \sin \theta$ 、 $dy = \sqrt{r^2 - x^2} \cos \theta d\theta$ という変数変換をすると、積分範囲は、 $0 \leq x \leq r$ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) と変換され、以下となる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} S &= \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} dx \sqrt{r^2 - x^2} \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^r \int_0^{\pi/2} r dx d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^r r dx = \frac{\pi}{2} r^2 \end{aligned}$$

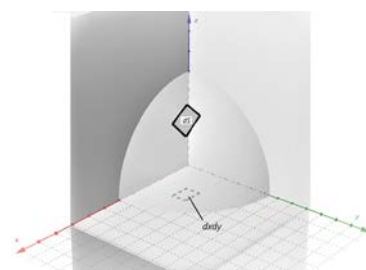
$$S = 2\pi r^2$$

以上より、上半分の球面の面積が求まった。

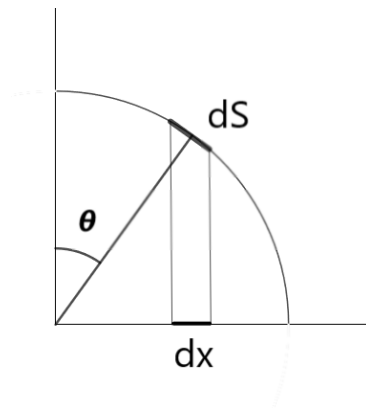
曲面を表す多変数関数の形がわかっているならば、この面積分の方法で曲面の面積を計算できる。



曲面の面積



球面の面積



多重積分の例：体積

体積の場合は細い曲面下の薄い板（さらに分割すれば、細い柱）の体積を足し合わせたものと考えるとよい。

$$V = \iint f(x, y) dx dy \leftarrow \sum f \Delta x \Delta y$$

例 球の体積

直角座標 (x, y, z) で球を表すと以下となる。

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

高さが z で幅が dy の薄い板（微小体積 $z dy$ ）を x 方向に積分する。

$$\begin{aligned} V &= \int_{y_1}^{y_2} z dy \int_{x_1}^{x_2} dx \\ &= \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} z dx dy \quad \text{一般的} \\ &= \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2-x^2-y^2} dx dy \\ &= \int_{-r}^r dx \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2-x^2-y^2} dy \end{aligned}$$

ここで、 $y = \sqrt{r^2 - x^2} \sin \theta$, $dy = \sqrt{r^2 - x^2} \cos \theta d\theta$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ と

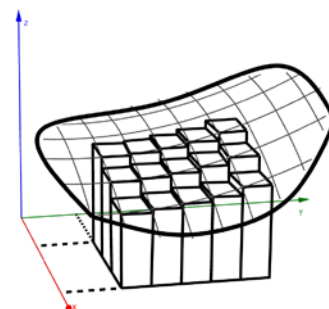
変数変換すると、

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^r dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \sqrt{r^2 - x^2} \cos \theta d\theta \\ &= \int_{-r}^r dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r^2 - x^2) \cos^2 \theta d\theta \quad \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \\ &= \int_{-r}^r dx (r^2 - x^2) \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^r \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$

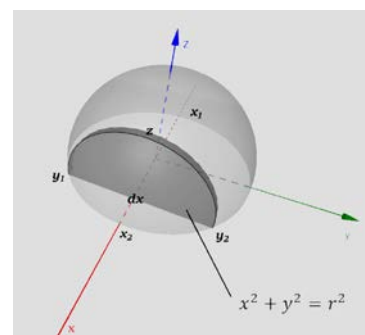
となり、球の上半分の体積が求まった。

Exercise: 確認

上記を確認せよ。



曲面の下での体積

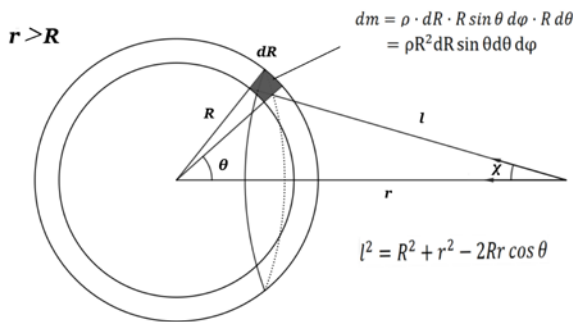


球の体積

多重積分の例：球殻の作る重力場

微小量と多重積分を使うと、薄い球殻による重力の強さを計算することができる。かなり面倒な変換があるので、やや上級向け演習。

一様密度 ρ の物質でできた、半径 R で厚さが dR ($dR \ll R$) の薄い球殻の中心から、距離 r ($r > R$) における重力の強さを求めてみよう。



球座標を使うと、球殻上の微小面積要素 dS は $dS = R \sin \theta d\phi \cdot R d\theta$ と表されるので、厚さを掛けて微小体積とし、密度を掛けて微小部分の質量

$$\begin{aligned} dm &= \rho \cdot dR \cdot R \sin \theta d\phi \cdot R d\theta \\ &= \rho R^2 dR \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned}$$

が得られる。また、考えている点と微小部分の距離 l 、その微分量 dl 、そして半径方向と微小部分方向のなす角度 χ は、それぞれ以下ようになる。

$$l^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta$$

$$l dl = Rr \sin \theta d\theta$$

$$\begin{aligned} \cos \chi &= \frac{r - R \cos \theta}{l} \\ &= \frac{l^2 + r^2 - R^2}{2rl} \end{aligned}$$

上記の準備のもとで、この微小部分から、考えている点にある質量 m' にかかる中心方向の重力は、単位質量当たりの重力（重力加速度）にすると以下のように表せる（中心方向と垂直方向は全体としてキャンセルする）。

$$\begin{aligned} \frac{1}{m'} df &= -G \frac{dm}{l^2} \cos \chi \\ &= -G \frac{\rho R^2 dR \sin \theta d\theta d\phi}{l^2} \cdot \frac{l^2 + r^2 - R^2}{2rl} \\ &= -G \frac{\rho R^2 dR d\phi}{l^2} \times \frac{ldl}{Rr} \times \frac{l^2 + r^2 - R^2}{2rl} \end{aligned}$$

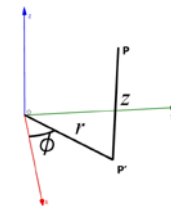
（ θ に関する積分を l に関する積分に変えている）

▼球座標

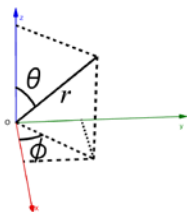
3次元空間の座標としては、

- ・直角座標 (x, y, z)
- ・円筒座標 (r, ϕ, z)
- ・球座標 (r, θ, ϕ)

などがよく使われる。



円筒座標



球座標

▼座標変換

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

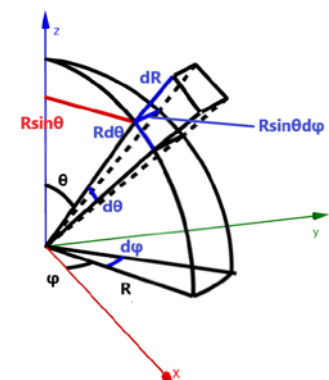
$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

▼球座標と微小体積要素

直角座標における微小体積要素は、 $dV = dx dy dz$ だが、球座標の場合は、微小面積要素 $dS = r \sin \theta d\phi r d\theta$ に微小な厚さ dr を掛けて、以下となる。

$$dV = r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$$



球座標での微小体積要素

この式を距離 l と円周角 ϕ で多重積分すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{1}{m'} f &= -G \frac{\rho R^2 dR}{2r^2 R} \iint \frac{l^2 + r^2 - R^2}{l^2} dl d\phi \quad \text{ぐるりの積分} \\ &= -G \frac{\rho R dR}{2r^2} 2\pi \int_{r-R}^{r+R} \frac{l^2 + r^2 - R^2}{l^2} dl \\ &= -G \frac{\rho R dR}{2r^2} 2\pi \left[l - \frac{r^2 - R^2}{l} \right]_{r-R}^{r+R} \\ &= -G \frac{\rho 4\pi R^2 dR}{r^2}\end{aligned}$$

そして、 $m = \rho 4\pi R^2 dR$ は、いま考えている薄い球殻全体の質量なので、
結局、球殻状の物質分布が作る外部の重力場は、

$$\frac{1}{m'} f = -G \frac{m}{r^2}$$

と表されることになる。これは、球殻の物質がすべて中心に集中している場合の重力場と同じである。すなわち、

球殻外部の重力場は質点の重力場と同じ

なことがわかる。さらに、球対称な物体は連続する球殻であることから、

球対称な物体の外部重力場は質点の重力場と同じ

ことが一般的に証明できる。

Homework: 球殻内部の重力場をもとめる

同様な方法で、球殻内部の重力場が 0 になることを示せ。

$$\frac{1}{G} f = 0$$

Homework: 重力ポテンシャル

球殻外部と内部の重力ポテンシャルと求めてみよ。

Homework: 電場と電位

球殻に分布した電荷による、電場と電位についても考えてみよ。

▼積分方程式の例

輻射輸送方程式

radiative transfer equation

媒質中を伝播する光線の変化を表す方程式で、たとえば、具体例として

- ・薄雲を通した太陽の見え方
- ・青空、夕焼け、黄砂
- ・霧の中のヘッドライト
- ・肌色

などが挙げられる。基本的には、光線の強さ（輻射強度）に関する微分方程式だが、光線の強さの積分を含むため、**微分積分方程式**になっている。

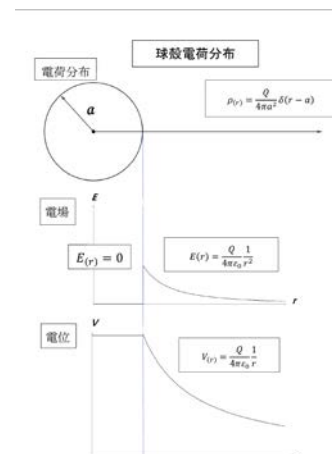
$$\begin{aligned}\frac{dI(l)}{ds} &= \eta - \alpha I(l) - \beta I(l) \\ &+ \beta \iint I(l') \frac{\sin \theta' d\theta' d\phi'}{4\pi}\end{aligned}$$

$I(l)$: ある方向 (l) の光の強さ

η : 光の体積放射率

α : 光の体積吸収係数

β : 光の体積散乱係数



6 ベクトル解析

Questions today

スカラーとベクトルの違いは？

ベクトルの内積とは？

電磁場のマクスウェル方程式は習った？

微分・積分の復習、偏微分、多重積分ときて、いよいよヘビーのピーク、ベクトル解析を簡単に紹介する。

物理量のタイプによって、以下のような関数がある。

スカラー関数 $\phi(x, y, z, t)$ 重力ポテンシャル、電位

ベクトル関数 $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ 速度ベクトル

$\mathbf{F}(x, y, z, t)$ 力ベクトル

$\mathbf{E}(x, y, z, t)$ 電場ベクトル

テンソル関数 R_{ij}, g_{ij}, T_{ik} 時空テンソル、エネルギー運動量テンソル

ベクトル方程式の例

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \quad \text{一般的な運動方程式}$$

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla \phi \quad \text{重力ポテンシャルを用いた重力が働いている場合}$$

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad \text{ローレンツ力（電磁力）が働いている場合}$$

これらの方程式は、空間成分にわければそれぞれ3本の式になるところが、ベクトルで表すと1つの式で表現できて美しい。また、成分毎だとバラバラに計算しないといけないところが、ベクトルだと計算の手間が1/3になり、まとめてエレガントに演算できる。

テンソル方程式の例

$$R^{ik} - \frac{1}{2} R g^{ik} + \Lambda g^{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{ik} \quad \text{アインシュタイン方程式}$$

この（2階の）テンソル方程式は、変数が時空間の関数なので、この1つの方程式の中には、なんと16本の成分式を含んでいる（時空の対称性から独立な式は10本になる）。

▼スカラー、ベクトル、テンソル

数のタイプとして、質量やポテンシャルのように、1つの数値で表されるものがスカラー。（ベクトルなどと比較して）スカラーの成分（要素）は1つで、その値は座標系によらない。

位置ベクトルや速度ベクトルのように、複数の成分（要素）をもつが、その要素を1行（1列）に並べて表現できる数がベクトル。成分は1つの添え字で表現できる。向きと大きさをもった量でもある。一般に、ベクトルの成分は座標に依存して変化する。

歪みテンソルのように、複数の成分をもち、かつ2つ以上の添え字で表現されるものがテンソル。添え字が2つの場合は行列で表すこともできる。

スカラー scalar

ベクトル vector

テンソル tensor

A_k : Capital A sub k

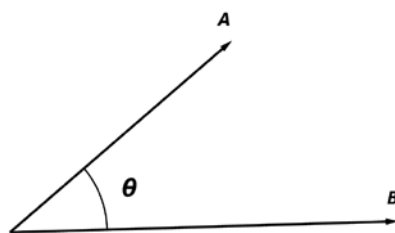
▼アインシュタイン方程式

アインシュタインが導いた一般相対論の最終方程式で、左辺が（物質の分布で決まる）空間の構造を、右辺が（空間の構造で決まる）物質の分布を表す。ブラックホールも宇宙全体も、この方程式で説明できる。

アルベルト・アインシュタイン
(Albert Einstein : 1879~1955)

内積（スカラー積）

ベクトルの内積（スカラー積）はスカラーとなり、その大きさは、それぞれのベクトルの大きさの積にベクトルのなす角度の余弦を掛けたもの。



式で表すと以下となる。

$$C = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta$$

成分表示は以下となる。

$$C = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

内積の例 仕事

斜め上向きの力 $\mathbf{F}$ で水平方向にベクトル $\mathbf{s}$ だけ動かしたとき、その力のなす仕事は、 $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$ になる。

▼ベクトルのフォント

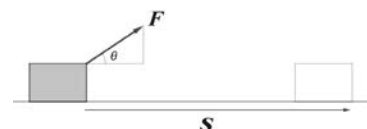
高校まではベクトルを矢印で表現するが、大学の理系では、ベクトルの書体は通常は、太字・添え字で表す。

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t), v_i(r_i, t)$$

手書きの場合は、文字の縦線や斜め線を2重にして表す。

内積 inner product

スカラー積 scalar product



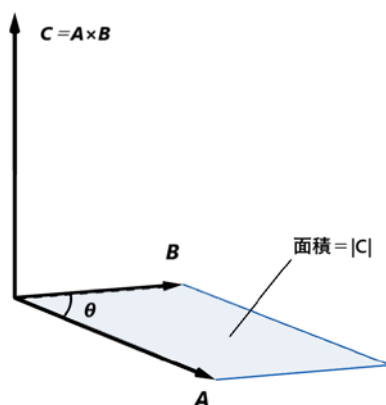
仕事

Exercise: 内積の可換性

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ であることを確認せよ。

外積（ベクトル積）

ベクトルの外積はベクトルとなり、その大きさは、それぞれのベクトルの大きさの積になす角度の正弦を掛けたもので、向きは、2つのベクトルが作る平面に垂直方向で1つ目のベクトルから2つ目のベクトルに右ねじを回すときにねじの進む方向となる。



式で表すと以下となる。

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta \mathbf{e}$$

成分表示は以下となる。

▼行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \mathbf{e}_x - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} \mathbf{e}_y + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}$$

外積の例 力のモーメント

中心から位置ベクトル $\mathbf{r}$ で中心方向に対して垂直方向に力 $\mathbf{F}$ をかけたとき、力のモーメント（トルク）、 $\mathbf{N}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}$ になる。

外積の例 ローレンツ力

$$\mathbf{B} = (0, 0, B_z), \mathbf{J} = (J_x, 0, 0) \text{ のとき、 } \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -J_x B_z \\ 0 \end{pmatrix} \text{ となる。}$$

Exercise: 外積の非可換性

一般に、 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{B}\times\mathbf{A}$ が成り立たないことを確認せよ。

ベクトル演算子

偏微分のところで少し触れた微分演算子 ∇ （ナブラ）は、偏微分を成分にもつベクトル演算子でもある。

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

ナブラの例 静電ポテンシャルと電場

電荷 q の点電荷から距離 r における、静電ポテンシャル ϕ と電場 $\mathbf{E}$

$$\phi = k \frac{q}{r}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = k \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

2つの点電荷がある場合もポテンシャル（スカラー）なら足すだけ。

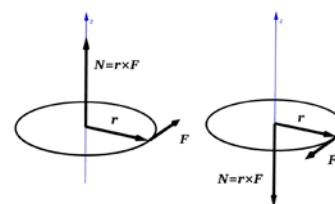
$$\phi = k \frac{q}{r_1} + k \frac{q}{r_2}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi$$

Exercise: 重力と重力ポテンシャル

複数の重力源がある場合の、重力ポテンシャルと重力場を考えてみよ。

ベクトルやベクトル演算子を用いて数式を記述し、ベクトルやベクトル演算子の性質を上手に利用して、微分や積分を実行し、数式をエレガントに処理するのが、**ベクトル解析**のおおまかな内容である。



トルク

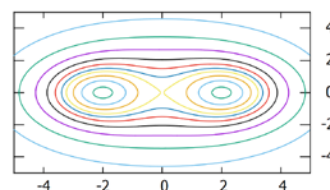
▼微分演算子ナブラ

∇

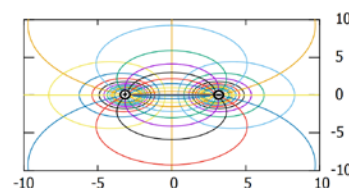
活字体ではわかりにくい、この記号も太字にならないといけない。また手書きの場合は、左側の斜め線を2重にして表す。

この記号 ∇ はナブラ (nabla) と読むが、ギリシャの竖琴に似ていることに由来する。

ベクトル演算子 vector operator



同符号の場合



異符号の場合

ベクトル解析 vector calculus

ナブラとスカラー関数の演算：勾配

ベクトル演算子ナブラをスカラー関数に作用させたものはベクトルとなり、**勾配**と呼ばれる。

$$\nabla \phi = \text{grad } \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad \text{記号と直角座標での成分表示}$$

自然現象での用例としては、高さ関数とその勾配ベクトルのところで触れたように、電磁ポテンシャルと電磁力、重力ポテンシャルと重力、化学濃度分布と濃度勾配、気圧分布と気圧勾配などがある。一般には、物理量のポテンシャル分布を表すスカラー関数と、そのポテンシャルによって生じる力の場を表している。

ナブラとベクトル関数の内積：発散

ベクトル演算子ナブラとベクトル関数の内積はスカラーとなり、**発散**と呼ばれる。

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad \text{記号と直角座標での成分表示}$$

自然現象での用例としては、物質の流れや磁場などがあるとき、ある領域における、それらの物理量の流入・流出を表している。

簡単のために x 方向 1 次元で考えてみると、物理量 A_x (これは x 方向の物質流量 ρv_x だったり、電場 E_x だったり、磁場 B_x だったりする) が、位置 x において A_x で、 $x+dx$ で A_x+dA_x に変化したとき、 dx の間での変化率は、 dA_x/dx になる。そして、

$dA_x/dx > 0$ A_x という物理量が増えた (湧き出しがあった)

$dA_x/dx = 0$ A_x という物理量の増減はない

$dA_x/dx < 0$ A_x という物理量が減った (吸い込みがあった)

ということになる。これを 3 次元に拡張すると、

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} > 0 \quad \text{物理量の流出がある}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0 \quad \text{ネットには物理量の出入りはない}$$

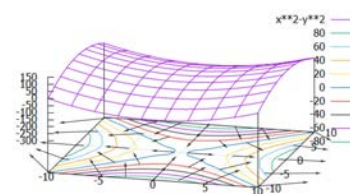
$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} < 0 \quad \text{物理量の流入がある}$$

ということを意味する。

Homework: ラプラスアン

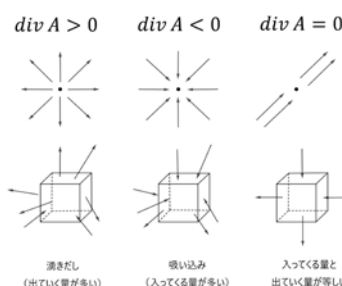
重力ポテンシャル $\phi = -GM/r$ にナブラ ∇ を 2 回演算してみよ。

勾配 gradient



ポテンシャルと勾配ベクトル

発散 divergence



発散：2 次元 (上) と 3 次元 (下)

▼ラプラシアン

スカラーポテンシャル (スカラー) にナブラを作用させると勾配 (ベクトル) になるが、その勾配ベクトルにナブラを内積させると発散 (スカラー) となる。このナブラとナブラを内積させた演算子をラプラス演算子 (ラプラシアン) と呼ぶ。

$$\phi = -\frac{GM}{r}$$

$$\nabla \phi =$$

$$\nabla \nabla \phi = \nabla^2 \phi = \Delta \phi = ?$$

ラプラス演算子 Laplacian

ナブラとベクトル関数の外積：回転

ベクトル演算子ナブラとベクトル関数の外積はベクトルで、**回転**と呼ぶ。

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{記号と直角座標の成分表示}$$

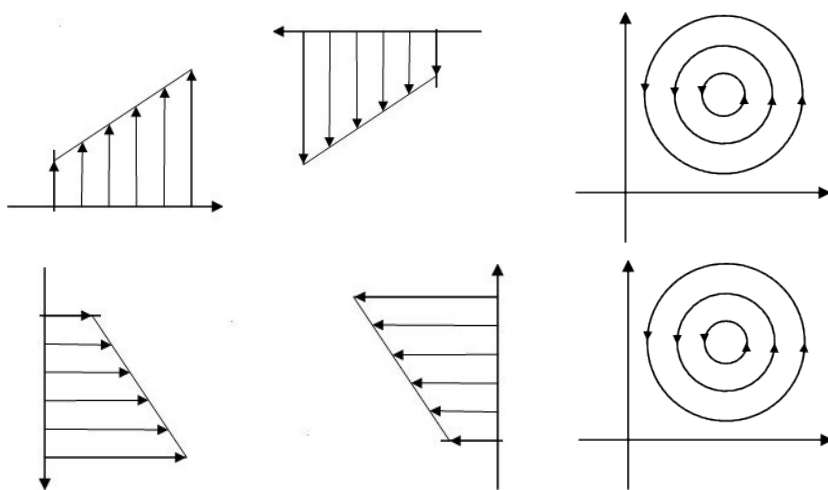
自然現象での用例としては、電流を流したときに、導線の周囲には右ねじの法則の磁場が生じるが、この磁場の形状がまさに回転で表される。あるいは、水の流れて水車を回す（渦を作る）とき、水の流れる様子と回す強さ（および向き）の関係が回転で決まる。

簡単のために xy 平面で、水の流れ（ xy 平面内のベクトル場なので、 A_x と A_y がある）による渦（ z 方向のベクトルになる）の生成を考えてみよう。このときは、回転の z 成分のみを考えて以下となる。

$$\nabla \times \mathbf{A} |_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

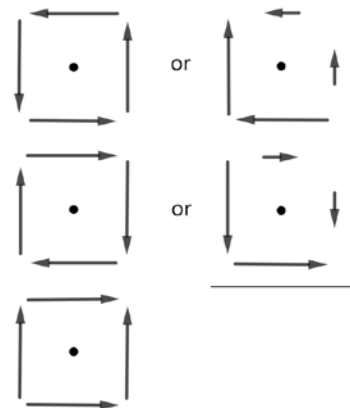
まず y 方向の流れの場合（右辺第1項）を考えてみると、一様な流れでは偏部分は0となり渦の生成を起こせない。上向きの流れが x 方向の増加する場合と、下向きの流れが x 方向に減少する場合は、反時計回りの渦を引き起こすが、このとき右辺第1項はどちらも正になっている。逆に言えば、右辺第1項が負の場合は右回りの渦になる。

つぎに x 方向の流れの場合（右辺第2項）を考えてみると、マイナスの符号を考慮すると、右向きの流れで y 方向に減少する場合と、左向きの流れで y 方向に増加する場合は、反時計回りの渦に寄与する。



合わせると、右辺の符号が正の場合、反時計回りの渦場となる。

回転 rotation



(上) 左回りの回転

(中) 右回りの回転

(下) 回転なし

▼ベクトル解析の公式

以下のような公式を上手に利用し、ベクトル式のまま、さまざまな式変形をするのが、ベクトル解析の極意。

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$\nabla(\varphi\psi) = (\nabla\varphi)\psi + \varphi(\nabla\psi)$$

$$\nabla \cdot (\varphi\mathbf{A}) = (\nabla\varphi) \cdot \mathbf{A} + \varphi(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

$$\nabla \times (\varphi\mathbf{A}) = (\nabla\varphi) \times \mathbf{A} + \varphi(\nabla \times \mathbf{A})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

$$\nabla \times (\nabla\varphi) = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

自然を記述する美しい方程式

電磁力や重力などの力の場、時空構造、そして素粒子などの振る舞いを記述する方程式は、しばしば、ベクトルやテンソルなどの量もちいて表現されている。

【マクスウェル方程式】

電場と磁場を統合した電磁場の振る舞いを表すベクトル方程式。

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

【アインシュタイン方程式】

時空の構造と物質・エネルギーの分布を同時に表すテンソル方程式。

$$R^{ik} - \frac{1}{2} R g^{ik} + \Lambda g^{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{ik}$$

この（2階の）テンソル方程式は、変数が時空間の関数なので、16本の式を含んでいる（時空の対称性から独立な式は10本になる）。

【シュレディンガー方程式】

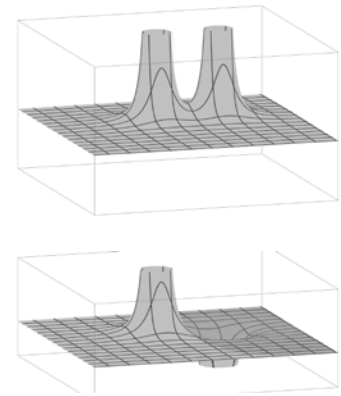
原子内での電子の量子力学的な振る舞いを表す波動方程式。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H\Psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \right] \Psi$$

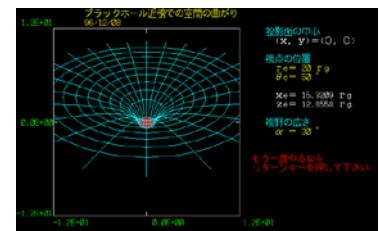
【ディラック方程式】

相対論的な電子・陽電子の振る舞いを表すスピノール方程式。

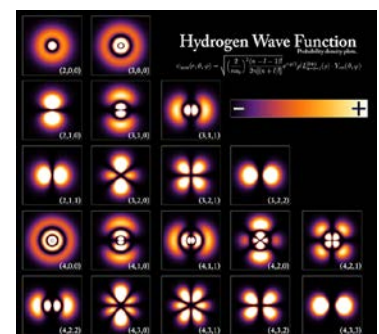
$$E \begin{pmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{pmatrix} = cp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{pmatrix}$$



電場のポテンシャル

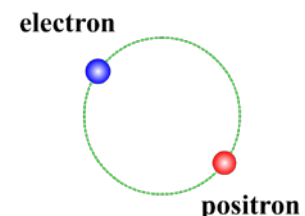


空間の曲がり



電子雲の分布

(https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hydrogen_Density_Plots)



マイナスの電荷をもった電子とプラスの電荷をもった陽電子が結びついたポジトロニウム

マクスウェル方程式

ベクトル解析の総まとめとして、電磁場を記述するマクスウェル方程式について、少し述べておこう。

高校や大学で電流や磁場を学ぶと、静電気に関するクーロンの法則、静磁気に関するクーロンの法則、オームの法則、アンペールの法則、キルヒホッフの法則、ビオ・サバールの法則、右ねじの法則、フレミングの左手の法則、フレミングの右手の法則、レンツの法則、ファラデーの電磁誘導の法則、などなど、法則の嵐で頭を抱えただろう。これら電場と磁場の性質に関して、1864年、マクスウェルがたった4本のベクトル方程式にまとめた。それが**マクスウェル方程式**である。

- ① $\operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$
- ② $\operatorname{div} \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
- ③ $\operatorname{rot} \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
- ④ $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$

以下、順に見てみよう。

①あるベクトル（電場 $\mathbf{E}$ ）の発散が正になるのは、そのベクトル場に対して湧き出しがあることを意味している。この式は、電荷 ρ のまわりには、他の電荷に影響を与える力（電場 $\mathbf{E}$ ）が存在することを表している。...これは電気に関するクーロンの法則を含んでいる。

②あるベクトル（磁場 $\mathbf{B}$ ）の発散が0ということは、湧き出しや吸い込みがないことを意味する。この式は、単独の磁荷が存在しないことや、磁極の間には磁気（磁場 $\mathbf{B}$ ）が存在することを意味している（磁力線はリング状でもよい）。...これは磁気に関するクーロンの法則を含んでいる。

③ベクトルの回転は渦状の場を意味する。この式は、磁気（磁場 $\mathbf{B}$ ）が変化すると起電力 $\mathbf{E}$ が生じることを表している。...これはファラデーの電磁誘導の法則だ。

④ベクトルの回転は渦状の場を意味する。この式は、電荷が移動して電流 $\mathbf{J}$ が流れると、そのまわりに磁気（磁場 $\mathbf{H}$ ）が生まれることを表している。...これはアンペールの法則を一般化したものだ。

Exercise: アンペールの法則

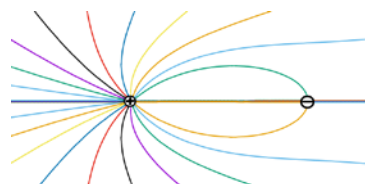
ベクトルの回転のところを振り返り、④で時間項を落とした式の z 成分：

$$J_z = \nabla \times \mathbf{B} \Big|_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}$$

が z 方向の電流によって右ねじの方向の磁場になることを示せ。

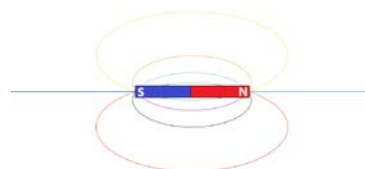
ジェームズ・クラーク・マクスウェル
(James Clerk Maxwell : 1831~1879)

マクスウェル方程式 Maxwell's equations



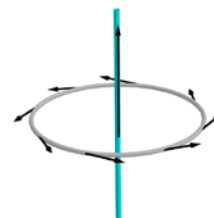
▼電場に関するガウスの法則

電束は+電荷から出て-電荷で終る



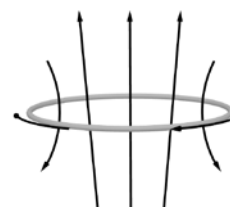
▼磁場に関するガウスの法則

磁束線は湧き出しも吸い込みもない



▼アンペールの法則

電流のまわりに磁場ができる



▼ファラデーの電磁誘導の法則

磁束の時間変化で電場ができる

マクスウェル方程式：電磁波

マクスウェル方程式は一般的には複雑だが、比較的に解きやすい例として、マクスウェル方程式から電磁波の波動方程式を導いてみよう。

まず電荷なし ($\rho=0$)、電流なし ($J=0$) とすると、

- ① $\text{div } \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$
- ② $\text{div } \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
- ③ $\text{rot } \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
- ④ $\text{rot } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

となり、③と④を成分で書き下すと、以下となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= c \text{rot } \mathbf{B} & \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -c \text{rot } \mathbf{E} \\ \Downarrow & & \Downarrow & \\ \frac{\partial E_x}{\partial t} &= c \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial B_x}{\partial t} &= -c \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} &= c \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) & \frac{\partial B_y}{\partial t} &= -c \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} &= c \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial B_z}{\partial t} &= -c \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

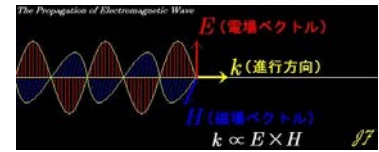
左式の x 成分の両辺を時間で偏微分し、磁場の時間微分に右式を入れる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} &= c \left[-c \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) + c \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \right] \\ &= c^2 \left(-\frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial x} \right) \\ &= c^2 \left[\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \right] \\ &= c^2 \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right) = c^2 \Delta E_x \end{aligned}$$

と変形でき ($\text{div } \mathbf{E}=0$)、電場の x 成分 E_x に関する波動方程式の形になる。これは、真空中 ($\rho=0, J=0$) で電場が波として伝わることを表している。

Exercise: その他の成分

電場の y 成分 z 成分、磁場の各成分も同じ波動方程式になることを示せ。



電場と磁場が交互に変化して、電磁波を形成する

▼ベクトル形式での変形

成分表記だと、 x 成分だけでも、かなり面倒な計算になり、それを3成分について計算しないとイケない。ベクトル解析を使うと、ベクトル形式のまま、一挙に導くことができる。

左式の両辺を時間で偏微分し、磁場に右式を入れる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= c \text{rot } \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ &= -c^2 \text{rot rot } \mathbf{E} \end{aligned}$$

ここで右辺の $\text{rot rot } \mathbf{E} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}$ なので、ベクトル解析の公式：

$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ を右辺に適用すると、以下となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= -c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) \\ &= -c^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) + c^2 \nabla^2 \mathbf{E} \\ &= c^2 \Delta \mathbf{E} \end{aligned}$$

($\text{div } \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ を使用)

本文の3倍(3成分)の内容が、半分の分量で済んでいることがわかるだろうか(入力半分以下だ!).

式の導出や意味はともかく、ベクトル解析はそれぐらい便利なものだという事を感じてもらえよ。

7 科学的な調べ方

Questions today

平均はどう計算する？

標準偏差(誤差)はどう評価する？

自然界に存在する事物の物理量と、数学で扱う数の違いとして、物理量は単位（次元）をもつことは述べた。もう一つの大きな違いは、理論的に導出する場合を除き、物理量の値は実験や観測などの**測定**によって得られるので、物理量には必ず誤差が伴うことだ。エクセルなどに測定データを放り込めばグラフは描いてくれるだろうが、誤差評価などの基本的なことができていない人が多い。ここでは誤差評価など、データ処理の基礎を簡単にまとめておく。

誤差

一口に誤差といっても、何種類もの誤差がある。たとえば、1本の鉛筆の長さを10回測ると、mmのレベルで測定値がばらつくだろう。このような測定に伴う誤差を**測定誤差**という。また、10本の鉛筆を同時に測っても、それぞれの鉛筆の長さが違うので、測定値がばらつくだろう。このような標本調査に伴う誤差を**統計誤差**という。さらに、円周率を使った計算をする際には、通常は厳密な値ではなく、3.14ぐらいに数値を丸めて計算する。このように、計算に伴う誤差が**計算誤差**である。

誤差に関する理論だけで『誤差論』と呼ばれる1冊の本になるぐらいだが、最低限の誤差評価の仕方を身につけて欲しい。

母集団と標本集団

講義の受講者男子（女子）の平均身長を求めるなら、全員の身長を申告してもらって、平均を取ればよい。しかし、日本の大学全体での一回生男子（女子）の平均身長を求めるとき、全員の身長を測定するのは現実的ではない。全体の一部を取り出して、その集団のデータで処理し、全体の動向を推定するだろう。

もともとの集団（データ全体）を**母集団**、取り出した一部を**標本**、そして母集団から標本を取り出すことを**標本抽出**と呼ぶ。また母集団全体での調査を**全数調査**、標本集団での調査を**標本調査**と呼ぶ。

実験 experiment

観測 observation

測定 measurement

誤差 error

測定誤差 measurement error

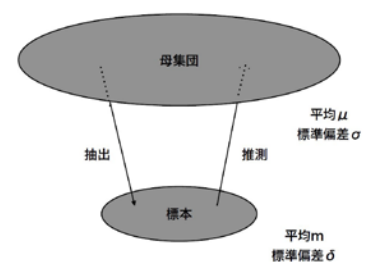
統計誤差 statistical error

計算誤差 calculation error

▼誤差

同じ測定誤差でも、ものさしが少し縮んでいるなど測定器具などの偏りによるものを**系統誤差**という。正しい物差しで測定して、単純に、ランダムに生ずるものは**偶然誤差**という。

計算誤差にも、有効数字を短く“丸めた”ための丸め誤差や、近い値の数字を引き算して有効数字が減少する桁落ちなど、種々のものがある。



母集団 population

標本集団 sample population

平均と標準偏差（誤差）

先週集めたデータを板書し、受講者の身長と体重をもとに統計量を求めてみよう。平均、標準偏差、相関係数などを計算し、ヒストグラム、相関図、正規分布などを描く。男子と女子で違いが出るか？

①平均

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}, \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N}$$

※母集団の平均を μ 、標本平均を m と区別することもある。

②標準偏差

・偏差

データのバラツキ具合の指標として、平均からのずれ（偏差）を使って、

$$\frac{\sum (x_i - \bar{x})}{N}$$

でもよさそうだが、偏差は+も-もあるため、相殺されてしまうことがあり、適切な指標とならない。絶対値にするか…？

・標準偏差

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N}}$$

2 乗したら常に正になる。

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2)}{N}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - 2\bar{x}\sum x_i + N\bar{x}^2}{N}}, \sum x_i = N\bar{x} \\ &= \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - N\bar{x}^2}{N}} \end{aligned}$$

※母集団の標準偏差を σ 、標本平均を s と区別することもある。

全体 N ⊃ 標本 M の場合、

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N}}, \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^M (x_i - \bar{x})^2}{M-1}}$$

のように、標本集団の標準偏差（誤差）を少し多めに見積もるとよい。

Exercise: 受講者の身長と体重の統計を調べてみよう

身長と体重の平均と標準偏差を求めよ。

板書したデータリスト

データ番号 身長 体重

1

2

...

$i \quad x_i \quad y_i$

...

$N \quad x_N \quad y_N$

平均 mean, average

標準偏差 standard deviation

具体的なデータ例

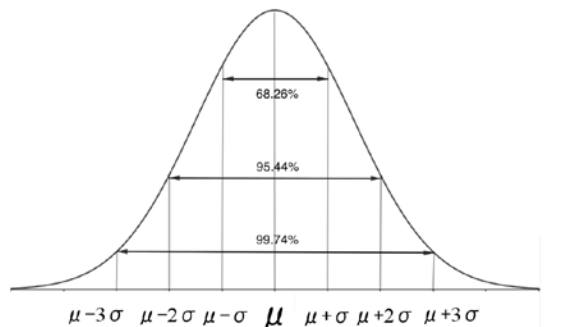
データ番号 身長[cm] 体重[kg]

男子

01	180	82	21	168	67
02	171	65	22	164	65
03	178	54	23	165	48
04	165	55	24	171	70
05	167	66	25	168	79
06	171	56	26	170	62
07	170	70	27	180	70
08	181	70	28	168	60
09	169	56	29	170	55
10	185	72	30	175	80
11	171	67	31	170	60
12	165	57	32	178	57
13	171	56	33	172	64
14	170	65	34	175	72
15	188	65	35	184	81
16	168	53	36	175	66
17	180	74	37	180	64
18	170	64	38	160	46
19	167	74	39	164	71
20	180	73	40	178	65

正規分布

誤差がランダムに生じる場合、標本数が十分に大きければ、誤差の分布は、釣り鐘形状の**正規分布（ガウス分布）**になる。



平均が $\bar{x}$ で、標準偏差が σ の正規分布は以下の式で表される。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

正規分布は全範囲（ $-\infty < x < \infty$ ）で積分すると1になるように、係数が決められている： $\int f(x)dx = 1$

平均値に対して対称な正規分布では、データ全体を100%とすると、

$\bar{x} \pm \sigma$ 68.26%

$\bar{x} \pm 2\sigma$ 94.44%

$\bar{x} \pm 3\sigma$ 99.73%

の割合になっている。

Homework: 受講者の身長と体重の統計を調べてみよう

し残した部分を仕上げよ。

Homework: 正規分布を描く

事前に受講者の身長と体重の平均および標準偏差を計算しておくこと。身長ヒストグラムを描き、同じグラフ上に、身長の平均と標準偏差で表される正規分布を描いてみよ。

Homework: 標本調査と統計処理

何でもよいので標本調査を行い、平均、標準偏差、正規分布を描くこと。ただし、他の人と同じデータは不可。

Homework: 統計分布

2項分布、ポワソン分布など、他の統計分布についても調べてみよ。

具体的なデータ例

データ番号 身長[cm] 体重[kg]

女子

01	159	49
02	153	56
03	159	44
04	153	50
05	160	47
06	156	47
07	169	53
08	155	53
09	164	51
10	158	53
11	168	51
12	167	61
13	162	49

正規分布 normal distribution

ガウス分布 Gaussian distribution

▼検定

誤差の評価に関連して、得られた結果が統計的に意味があるかどうか（有意と呼ぶ）を判定する誤差検定という統計処理もある。検定についても調べてみて欲しい。

8 科学的な分析

Questions today

散布図を描けるか？

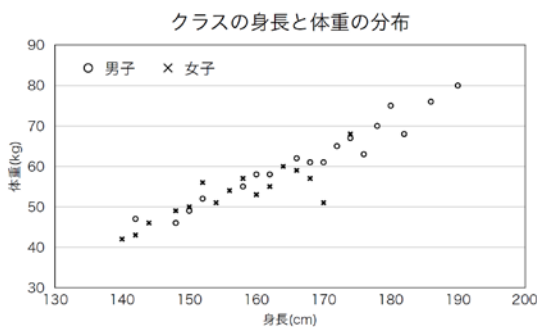
相関係数とは何か？

最小二乗法とは何か？

一つのデータについて統計処理をすることもあるが、2 つ（あるいはそれ以上）のデータについての関連を知りたいことも多い。たとえば、身長が高い人は体重も大きいのだろうか。2 種類のデータに関する基本的な分析手法を簡単に紹介する。

散布図と相関係数

2 種類のデータの関係を調べる一番単純な方法は、横軸にデータ x （たとえば身長）、縦軸にデータ y （たとえば体重）を取ったグラフに、データ点をプロットすることだろう。このようなデータプロットを**散布図**と呼ぶ。



データをプロットした散布図では定性的には関連性を読み取れるが、関連の度合いを数値化して表すためには、以下で定義される**相関係数 r** を計算すればよい。

$$r \equiv \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}}$$

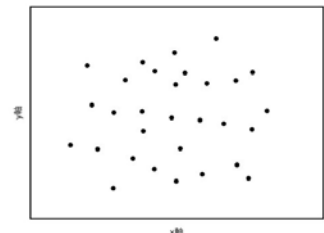
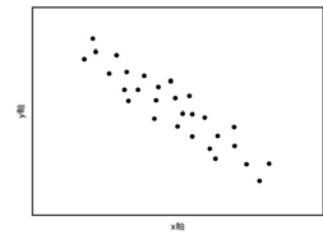
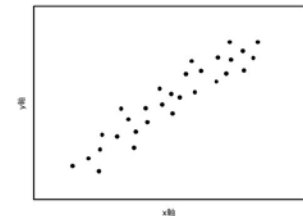
相関係数は、 $-1 \leq r \leq 1$ の範囲に収まる数値になり、非常に強い相関があるほど 1 に近く、無相関の場合は 0 となり、 x が増えるときに y が減るような逆の相関（反相関）のときは -1 に近くなる。

Exercise: 受講者の身長と体重の統計を調べてみよう

身長と体重の相関係数を求めよ。

散布図 scatter plot

相関係数 correlation coefficient



正の相関、負の相関、無相関

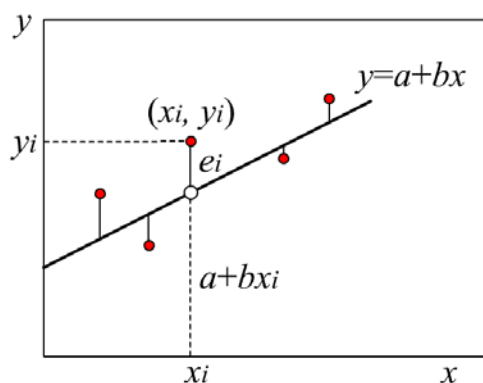
▼データの前処理

データ間で比例関係が期待できない場合は、データの値を前処理するとよい。

たとえば、葉っぱの大きさ（長さ）と重さの関係をみるときは、長さを 2 乗して面積の次元にしたものと重さの散布図を作るとよいかもしれない。べき乗の関係が期待される場合には、それぞれのデータの対数をプロットするといいたいだろう。

最小二乗法

もし2種類のデータの間に因果関係があれば、データの分布は1次関数その他、何らかの数学的關係で近似できることが多い。観測されたデータにもっともよくフィットする直線（あるいは曲線）を求める方法が、**最小二乗法**である。またフィットした直線を**最小二乗直線**あるいは**回帰直線**と呼ぶ。エクセルなどのソフトを使えば、ボタンを押すだけで最小二乗直線を求めてくれるが、きちんと原理を知っておけば、より深いデータ解析が可能になる。



残差と最小二乗直線

得られたデータ点をグラフ上にプロットし、もっともよくフィットする直線の式を $y = a + bx$ と置いたとき（係数 ab はまだ不明）、最小二乗法では以下のような考え方で係数を定めている。

まず、データ点と最小二乗直線の y 方向のずれを、**残差** e_i と呼ぶ。

$$\begin{aligned} e_i &= y_i - y \\ &= y_i - (a + bx_i) \end{aligned}$$

この残差は、未定係数を別として、データ量のみを使って決めることができる。標準偏差のときのように、残差の単純和はキャンセルされてしまうので、残差を2乗して加えた**残差平方和** J を考える。

$$J = \sum_{i=1}^N e_i^2$$

そして、最小二乗法では、この残差平方和が最小となるように、係数 ab を決める。

具体的には微分を使う。すなわち、残差平方和を係数 a と係数 b の2変数の関数とみなし、係数 a による偏微分と係数 b による偏微分がどちらも0となるようにする。

最小二乗法 method of least squares

回帰直線 regression line

残差 residual

残差平方和 residual sum of squares

では、実際に係数を求めてみよう。まず残差平方和を展開する。

$$\begin{aligned} J &= \sum [y_i - (a + bx_i)]^2 \\ &= \sum [y_i^2 - 2ay_i - 2bx_iy_i + a^2 + 2abx_i + b^2x_i^2] \\ &= \sum y_i^2 - 2a \sum y_i - 2b \sum x_iy_i + Na^2 + 2ab \sum x_i + b^2 \sum x_i^2 \end{aligned}$$

極値の条件は以下である。

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial b} = 0$$

偏微分を実行すると以下となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a} &= -2 \sum y_i + 2Na + 2b \sum x_i = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial b} &= -2 \sum x_iy_i + 2a \sum x_i + 2b \sum x_i^2 = 0 \end{aligned}$$

これらは a, b の連立 1 次方程式になっている。

$$\begin{aligned} 2Na + 2b \sum x_i &= 2 \sum y_i \\ 2a \sum x_i + 2b \sum x_i^2 &= 2 \sum x_iy_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2N \sum x_i a + 2 \left(\sum x_i \right)^2 b &= 2 \sum x_i \sum y_i \\ 2N \sum x_i a + 2N \sum x_i b &= 2N \sum x_iy_i \end{aligned}$$

$$\left(2 \left(\sum x_i \right)^2 - 2N \sum x_i \right) b = 2 \sum x_i \sum y_i - 2N \sum x_iy_i$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{\sum x_iy_i - N \bar{x} \bar{y}}{\sum x_i^2 - N \bar{x}^2} \\ \therefore a &= \frac{\bar{y} \sum x_i^2 - \bar{x} \sum x_iy_i}{\sum x_i^2 - N \bar{x}^2} \quad \text{あるいは} \quad a = \bar{y} - b \bar{x} \end{aligned}$$

Exercise: 受講者の身長と体重の統計を調べてみよう

身長と体重の最小二乗直線を求めよ。

Homework: 受講者の身長と体重の統計を調べてみよう

し残した部分を仕上げよ。

Report: 自然現象を表す微分方程式を調べる

- 1 自然現象の説明
- 2 微分方程式
- 3 その解
- 4 解の意味、解釈 (☆最も重要)

$$\begin{aligned} y &= a + bx \\ \bar{y} &= a + b\bar{x} \end{aligned}$$

▼直線で近似できない場合

直線的でないときは対数を取ると表せることが多い。

体重 w が $w = Ah^b$ で表されるとき。 b は 1 と 3 の間である。

$$\log_{10} w = \log_{10} A + b \log_{10} h$$

$W \qquad \qquad a \qquad \qquad H$

細菌の培養などは $y = Ae^{bx}$ で表される。

$$\begin{aligned} \log_{10} y &= \log_{10} A + bx \log_{10} e \\ &= \log_{10} A + (b \log_{10} e)x \end{aligned}$$

9 自然界のモデル化

Questions today

化学反応はどう進む？

細胞の増殖の仕方は？

科学の体系で述べたように、自然現象を観察・観測し、あるいは実験を行ってデータを収集し、収集したデータの中に何らかの規則性や法則性を見出し、その規則性や法則性を再現するモデルを構築して、さらにはそのモデルを用いて新たな現象を予測・予報していくことが、自然現象を理解するということであり、科学の営みである。実際、さまざまな自然現象がモデル化されており、それらのモデルの多くは微分方程式や偏微分方程式あるいは積分方程式などで表されている。いくつかは、すでに触れた通りである。ここではいろいろな例を挙げ、いくつか解いてみたい。

【物理】

自由落下（重力）

荷電粒子の運動（電磁力、ローレンツ力）

冷却・熱伝導 → 偏微分

波動方程式 → 偏微分

原子核崩壊

【化学】

化学反応方程式

物質の溶解曲線

結晶の成長

拡散方程式→偏微分

【生物】

成長曲線（植物・バクテリアのコロニーなどで使われる）

酵素反応

パターン形成 → 拡散方程式 → 偏微分

生態系のロトカ=ボルテラ方程式 → 非線形

【地学】

雨滴の落下（空気抵抗）

大気の水圧平衡（重力と空気の重さが釣り合い）

カオス方程式 → 気象などで使われる、非線形

地震波（波動方程式の一種だが、地球上の物質条件）

惑星の軌道運動

ブラックホールのまわりの光線の曲がり

▼その他の例

【物理】

投体運動

単振動

単振り子

減衰振動・強制振動

電気回路：直流回路、交流回路

衝撃波

孤立波

シュレディンガー方程式

【化学】

反応工学

量子化学

分子軌道法

【生物】

概日リズム

形態形成

競争モデル

疫病モデル

生物モデルの確率微分方程式

適応進化のダイナミクス

【地学】

海洋波、津波

大気波動

地球の年齢の放射性年代測定

惑星の内部構造

恒星の構造と進化

超新星爆発

宇宙の膨張

〈物理分野：放射性物質の崩壊〉

放射性物質の崩壊の速さは、「現在」の物質質量に比例する。時間 t の関数としての物質質量を y と置くと、崩壊の速さ dy/dt が y に比例することから、

$$\frac{dy}{dt} = -ky$$

と立式できる。ここで k は崩壊定数で、マイナスの符号は減少を表す。

たとえば、ラジウム $^{88}\text{Ra}226$ では、およそ、

$$k = -1.4 \times 10^{-11} \text{ s}^{-1}$$

である。

上の微分方程式は変数分離型で、以下のように解ける。

$$\frac{1}{y} dy = -k dt$$

$$\int \frac{1}{y} dy = -\int k dt$$

$$\ln y = -kt + C$$

$$y = e^C e^{-kt} = y_0 e^{-kt}$$

なお、最後の式では、時刻 $t=0$ での物質質量を y_0 とした（初期条件）。

放射性物質の量が最初の物質質量の半分になるまでの時間を**半減期**と呼ぶ。半減期の条件から以下のように求められる。

$$\frac{1}{2} y_0 = y = y_0 e^{-kt}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-kt}$$

$$-kt = \log \frac{1}{2} = -\log 2$$

$$t = \frac{1}{k} \log 2$$

たとえば、ラジウム $^{88}\text{Ra}226$ では、

$$t = 1570 \text{ yr}$$

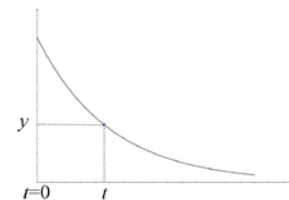
ぐらいとなる。



燐 銅 ウ ラ ン 鉱 石

(<http://www.ne.jp/asahi/radioactivity/mineral/gallery/>)

放射性崩壊 radio isotope decay



▼初期条件と境界条件

微分方程式を不定積分しただけでは、一般に積分定数が残る。状況に合うように積分定数を定めるためには、方程式とは別の条件が必要である。時間的な変化の場合は初期条件、空間的な変動の場合は境界条件などを与える。

半減期 a half-life period

▼熱放射による冷却

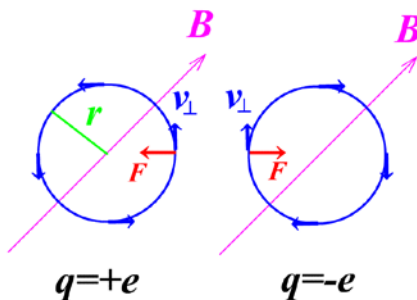
高温物体が熱を失う割合は、物体の温度 T と周囲の温度 T_e との 4 乗差に比例する。物体の質量を M 、比熱を c 、表面積を S 、ボルツマン定数を k と置くと、以下の式で表される。

$$Mc \frac{dT}{dt} = -kS(T^4 - T_e^4)$$

この式を解いてみよ。

〈物理分野；荷電粒子の運動〉

磁場中で荷電粒子が運動すると、磁石のそばの電流が流れている導線が力を受けるように、電磁力（ローレンツ力）を受ける。ローレンツ力は電流と磁場に垂直な方向に働くので、磁場の方向の運動は変化しないが、それ以外の方向の運動は変化する。



磁場の方向を z 軸とし、垂直な平面 (xy 平面) での運動を考える。

$I = qv$, $J = qv$, $B = (0, 0, B)$, $v = (v_x, v_y, 0)$ のとき、

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{qB}{mc} v_y \dots\dots\dots ①$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{qB}{mc} v_x \dots\dots\dots ②$$

$$① \times v_x + ② \times v_y \quad \text{より} \quad v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} = 0$$

$$\text{積分して} \quad v_x^2 + v_y^2 = C \quad \text{または} \quad \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 = C'$$

また、

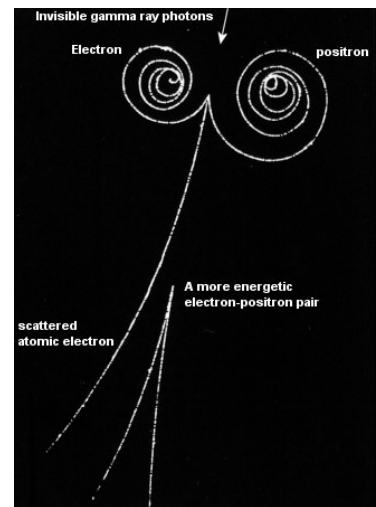
$$\frac{d}{dt} \times ① \quad \text{より}$$

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = \frac{qB}{mc} \frac{dv_y}{dt} = -\left(\frac{qB}{mc}\right)^2 v_x$$

となるので、これを解いて、上の積分を考慮し、以下の解が得られる。

$$v_x = A \sin \left[\left(\frac{qB}{mc} \right) t \right]$$

$$v_y = A \cos \left[\left(\frac{qB}{mc} \right) t \right]$$



霧箱内での荷電粒子の軌跡：上方から入射したガンマ線光子によって、電子と陽電子が対生成された様子
(<https://www.nuclear-power.net/nuclear-power/reactor-physics/>)



粒子加速器スプリング8

$$\frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 = C'$$

から運動エネルギーが保存されていることがわかる。

〈化学分野；化学反応方程式〉

【一次反応】

1 種類の原料から反応生成物が生成する化学反応

溶媒（たとえば水）が十分多量にあれば、反応速度は原料の濃度[A]に比例する。反応速度定数を k と置けば、以下のような変数分離型で解ける。

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A]$$

$$\frac{1}{[A]} d[A] = -k dt$$

$$\int \frac{1}{[A]} d[A] = -k \int dt$$

$$\log[A] = -kt + C$$

$$[A] = e^{-kt+C}$$

積分定数を決めるため、 $t=0$ のときの $[A]_0$ を代入する。

$$[A]_0 = e^C$$

$$\therefore [A] = e^{-kt} e^C = [A]_0 e^{-kt}$$

【二次反応】

2 種類の原料から生成物が生成する化学反応。

反応速度は濃度の積に比例する。

(1) $A+A \rightarrow B$ の場合

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A]^2$$

$$\int \frac{1}{[A]^2} d[A] = -k \int dt$$

$$-\frac{1}{[A]} = -kt + C$$

積分定数を決めるため、 $t=0$ のときの $[A]_0$ を代入する。

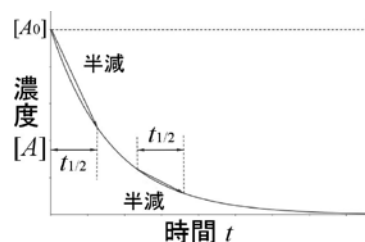
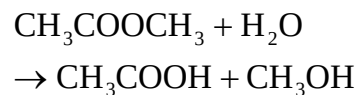
$$C = -\frac{1}{[A]_0}$$

$$\therefore \frac{1}{[A]_0} - \frac{1}{[A]} = -kt$$

$$\therefore [A] = \frac{1}{\frac{1}{[A]_0} + kt}$$

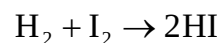
▼一次反応の例

酢酸メチルの加水分解



▼二次反応の例

水素とヨウ素の化合



(2) $A+B \rightarrow C$ の場合

	原料 A	原料 B	生成物 C
時刻 $t=0$ での濃度	a	b	0
時刻 $t=t$ での濃度	$a-x$	$b-x$	x

上記のように変数と初期条件を設定すると、反応方程式は以下のように表せ、積分できる。

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$$

$$\int_0^x \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = \int_0^t k dt = kt$$

$$\int_0^x \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{a-x} - \frac{1}{b-x} \right] dx = kt$$

$$\frac{1}{b-a} [-\ln(a-x) + \ln(b-x)]_0^x = kt$$

$$\frac{1}{b-a} \left[\ln \frac{b-x}{a-x} - \ln \frac{b}{a} \right] = kt$$

$$\frac{1}{b-a} \ln \frac{a(b-x)}{b(a-x)} = kt$$

$$\frac{1}{a-b} \ln \frac{b(a-x)}{a(b-x)} = kt$$

$$\frac{b(a-x)}{a(b-x)} = \exp[(a-b)kt]$$

$$\frac{a-x}{b-x} = \frac{a}{b} \exp[(a-b)kt]$$

ここで、 $\mu = \frac{a-b}{2}k$ と置くと、最終的に、

$$x = ab \frac{e^{\mu t} - e^{-\mu t}}{ae^{\mu t} - be^{-\mu t}}$$

が導ける。

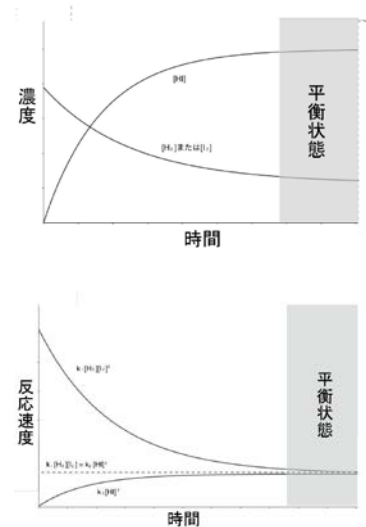
上記の反応では、 $a > b$ ($\mu > 0$) を暗に仮定している。このときは、十分に時間が経つと、初期に少ない方の原料 B が先になくなって、 $x=b$ となった段階で、反応式の右边が 0 になり (反応速度も 0 になる)、化学反応は停止する。

Homework:

上の解をグラフに描いてみよ。たとえば、 $a=1$, $b=0.9$, $k=0.1$ など。

Homework:

上記のタイプの化学反応で、 $a < b$ ($\mu < 0$) の場合は、基本的には同じ解になる。一方、 $a=b$ だと、積分が変わってくる。解いてみよ。



▼ナフタリンの蒸発

ナフタリンの蒸発速度は表面積に比例する。ナフタリンが半径 r の球形をしていると仮定したとき、その半径の変化はどう表されるか。

また 3 ヶ月の間に、半径が 1cm から 0.5cm になったとすると、球が事実上なくなる (半径 0.5mm になる) まですでにどれくらいかかるか。



〈生物分野；細胞の増殖と成長曲線〉

細胞の増殖や人口増加の速度は、十分な栄養と場所があれば、細胞数（個体数）に比例する。すなわち、生物集団の個体数を x と置くと、

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

$$x(t) = x(0)e^{at}$$

という指数型の解が得られ、無限に増殖する（マルサスの法則）。

しかし、実際には、個体数が増殖していくと、培地の栄養が不足したり、培地そのものが限界になり、環境が悪化して増殖が抑制される。このとき、

生物集団の個体数 x

増加因子 ax

抑制因子 $(1 - kx)$

と置いて、増殖速度が増加因子と抑制因子の積に比例するとした式

$$\frac{dx}{dt} = ax(1 - kx)$$

を **ロジスティック方程式** と呼ぶ。

この方程式は、以下のように変数分離で解ける。

$$\frac{dx}{dt} = ax(1 - kx)$$

$$\int_0^x \frac{dx}{x(1 - kx)} = \int_0^t a dt$$

$$\int_0^x \left(\frac{1}{x} + \frac{k}{1 - kx} \right) dx = at$$

$$[\ln x - \ln(1 - kx)]_0^x = at$$

$$\ln \frac{x}{1 - kx} = at$$

$$x = \frac{1}{k + \left(\frac{1}{x_0} - k \right) e^{-at}}$$

時間が経つと、個体数は $1/k$ に近づくので、 $1/k = x_\infty$ と置けば、

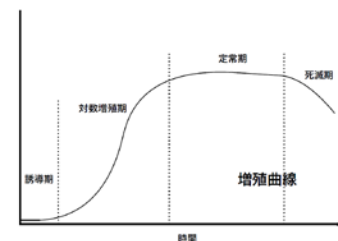
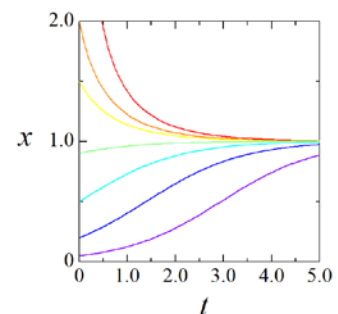
$$x(t) = \frac{x_\infty}{1 + \left(\frac{x_\infty}{x_0} - 1 \right) e^{-at}}$$

と表すこともできる。

Homework:

上の解をグラフに描いてみよ。

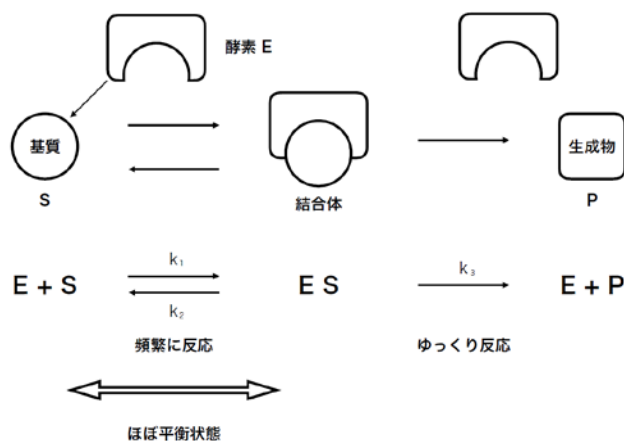
ロジスティック方程式 logistic eq.



実際の増殖の様子

〈生物分野；酵素反応〉

生体内の酵素反応で、基質 S に酵素 E が結合し結合体 ES となり、その一部は基質と酵素に戻る一方、一部は基質に戻らずに、酵素が分離して生成物 P が形成される。この酵素反応で、基質+酵素と結合体の間がほぼ平衡状態になっているときの反応速度式を、**ミカエリス・メンテン式**と呼ぶ。



上記の反応で、基質+酵素から結合体への反応速度を k_1 、その逆を k_2 、結合体から酵素+生成物への反応速度を k_3 と置くと、反応式は以下となる。

$$\frac{d[ES]}{dt} = k_1[E][S] - k_2[ES] - k_3[ES]$$

$$\frac{d[P]}{dt} = k_3[ES]$$

ここで、基質+酵素と結合体の間の反応速度が大きく、結合体の濃度がほぼ一定 ($d[ES]/dt \sim 0$) とすると、最初の式から、

$$0 = k_1[E][S] - (k_2 + k_3)[ES]$$

となり、酵素の総量を $E_{\text{tot}} = [E] + [ES]$ と置けば、結合体の濃度は、

$$[ES] = \frac{E_{\text{tot}}}{1 + \frac{k_2 + k_3}{k_1[S]}}$$

となる。これを生成物の反応式へ入れると、以下が得られる。

$$\frac{d[P]}{dt} = \frac{k_1 k_3 [S]}{k_2 + k_3 + k_1 [S]} E_{\text{tot}}$$

これがミカエリス・メンテン式である。

- ・基質濃度 $[S]$ が低いときは、反応速度は基質濃度に比例する
- ・基質濃度 $[S]$ が高くなると、反応速度は一定値に近づく

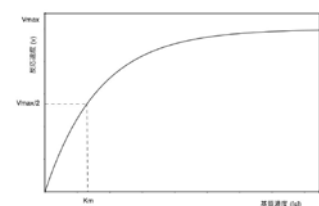
Homework:

上の解をグラフに描いてみよ。

酵素反応 enzymatic reaction

ミカエリス・メンテン式

Michaelis-Menten equation



反応速度と基質濃度の関係

基質濃度が高くなると、酵素のほとんどが基質と結合して酵素欠乏状態になる（飽和状態と呼ぶ）。

〈地学分野：雨滴の落下〉

雨滴は上空から落ちてくるはずなのに、それほど大きな落下速度ではない。速度に比例する空気抵抗を受けるためだ。雨滴の運動方程式は、鉛直上向き（重力加速度と反対方向）を z 軸とする座標系で、以下となる。

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - kv$$

ただし、 m は雨滴の質量、 g は重力加速度の大きさ、 k は空気抵抗の大きさ、そして v は速度の z 成分である（抵抗として働くので速度の前の符号はマイナス；落下運動なので速度の値は負であり全体としては正の値）。

この微分方程式も変数分離型で、時刻 $t=0$ で雨滴が原点 ($z=0$) に静止している ($v=0$) という初期条件のもとで解くと以下のようになる。

$$\int \frac{dv}{v + \frac{mg}{k}} = -\int \frac{k}{m} dt$$

$$\ln \left| v + \frac{mg}{k} \right| = -\frac{k}{m} t + C$$

$$v = -\frac{mg}{k} + C' e^{-kt/m}$$

$$v = -\frac{mg}{k} (1 - e^{-kt/m})$$

$$z = -\frac{mg}{k} \left[t - \frac{m}{k} (1 - e^{-kt/m}) \right]$$

十分時間が経てば、指数項は小さくなるので、

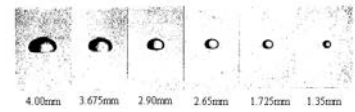
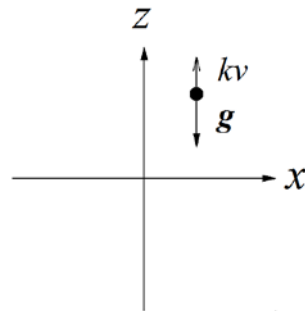
$$v \rightarrow v_{\infty} \equiv -\frac{mg}{k}$$

のように、落下速度は一定の値に近づく。これが雨滴の**最終速度**である（終末速度とか終端速度とも呼ばれる）。

ちなみに、典型的な雨滴（半径 1mm 程度）の地表付近での最終速度は、およそ 7m/s くらいと測定されている。

Homework:

上の解をグラフに描いてみよ。



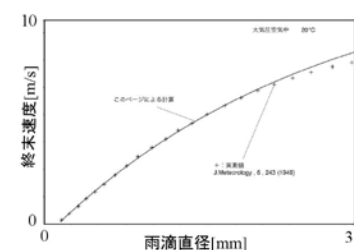
雨滴 (<http://www.bioweather.net/column/weather/contents/mame006.htm>)



猫の落下

終端速度 terminal speed

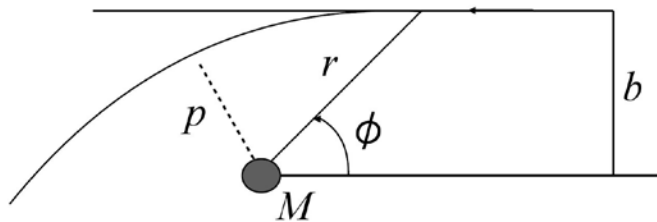
終末速度の意味は運動方程式に戻って考えればよくわかる。すなわち雨滴の落下は重力によって次第に加速されるが、雨滴に働く重力と速度に比例する抵抗が釣り合った段階でネットな力が 0 となり、雨滴は一定の最終速度に達する。



雨滴の落下速度（終末速度）

〈地学分野；光線の曲がり〉

質量があると周囲の時空は歪み、光線も曲げられてしまう。ブラックホールの場合には言うに及ばず、太陽の場合でさえ、太陽の縁をかすめる光線は1秒角程度曲がるのが測定されている。曲がった時空における光線の軌跡は、おそらく予想外に簡単な形の微分方程式になっている。



中心天体（たとえばブラックホール）の質量を M 、無限遠方から中心軸に対して b （衝突パラメータと呼ぶ）だけ離れて入射してきた光線の軌跡を、極座標 (r, ϕ) で表す。このとき、軌跡の微分方程式は以下となる。

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{3}{2} \frac{r_g}{r^2}$$

ただしここで、 $r_g \equiv 2GM/c^2$ はシュバルツシルト半径である。

両辺に $\frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r} \right)$ を掛けて、角度で積分すると以下の積分が得られる。

$$\left[\frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) = \frac{1}{b^2}$$

最初の微分方程式にせよ、積分した上の式にせよ、形としては比較的簡単な形をしているが、これ以上の積分は難しい。しかしながら、これらの式から、多少の性質を調べてみることはできる。

(1) ニュートン力学の場合

光速を無限大とすると、ニュートン力学の極限になるが、シュバルツシルト半径は0となる。このとき、上の式は、

$$\left[\frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{b^2}$$

となるが、この式が、以下の解をもつことは、すぐ確かめられるだろう。

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos \phi}{b}$$

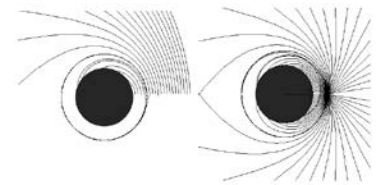
あるいは、 $r \cos \phi = b$ だが、これはまさしく直線の式である。

すなわち、ニュートン力学の極限では、たしかに光線は直進している。

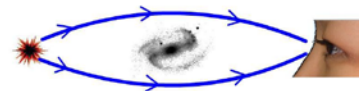
衝突パラメータ impact parameter

シュバルツシルト半径

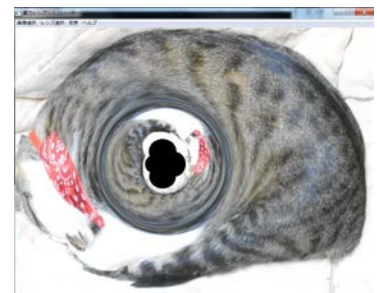
Schwarzschild radius



光線の曲がり



重力レンズ現象



(2) 光子半径

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{3}{2} \frac{r_g}{r^2} \rightarrow \frac{1}{r} = \frac{3}{2} \frac{r_g}{r^2}$$

上の式で、半径 r が方位角 φ によらず一定の場合、左辺の第1項は0となる。このとき、残りの項から、一定の半径として、

$$r = r_{\text{ph}} \equiv \frac{3}{2} r_g$$

が得られる。この半径を**光子半径**と呼ぶ。

光線（光子）は光子半径で円軌道を描くことができる（ただし、不安定）。

(3) ブラックホールの見かけの大きさ

$$\left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) = \frac{1}{b^2} \rightarrow \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) = \frac{1}{b^2}$$

上の式で、やはり左辺の第1項を0と置くと、半径が一定のときの半径と衝突パラメータ b の関係が得られる。光子半径を入れると、以下となる。

$$b = b_c \equiv \sqrt{\frac{27}{4}} r_g \approx 2.60 r_g$$

これを臨界衝突パラメータと呼んでいる。

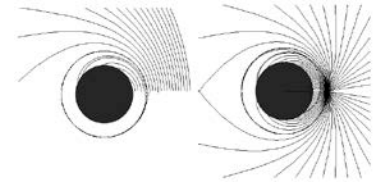
無限遠から飛来する光線（光子）は、その衝突パラメータが臨界衝突パラメータより大きければ、ブラックホールで曲げられた後、無限遠へ飛び去る。臨界衝突パラメータのときは、ブラックホールのそばで光子半径に巻き付く。そして臨界衝突パラメータより小さければ、ブラックホールに吸い込まれる。

光線を逆に辿れば、ブラックホールから出てくる光線（というものを想像すると）は、ギリギリ出てくる光線は無限遠で臨界衝突パラメータの方向に出ていくことになる。言い方を変えれば、無限遠から見たときのブラックホールの見かけの大きさは、その幾何学的な投影サイズ（シュバルツシルト半径）よりかなり大きく、シュバルツシルト半径の約 2.6 倍の大きさに見えることになる。このブラックホールの影を**ブラックホールシャドウ**と呼ぶ。

Homework:

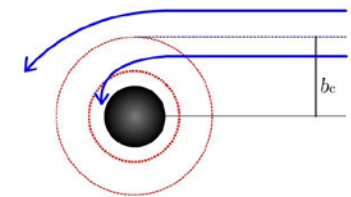
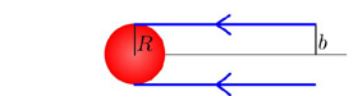
ブラックホールシャドウについて調べてみよ。

光子半径 photon radius



光線の曲がり

円軌道を描く光子に注目



ブラックホールの見かけの大きさ

ブラックホールシャドウ

black hole shadow



ブラックホールシャドウ（ブラックホールが自転している場合の例；高橋労太さんの計算）

10 封筒裏の計算とフェルミ推定

Questions today

概算とは？

さて、ここまで紹介したように、自然現象はさまざまな微分方程式や積分方程式その他の方程式で記述され、方程式を解析して理解がすすむ。が、いつもいつも微分方程式などを解析的・数値的に解いて、解を求めてから後、ようやく自然現象の理解を進めるわけではない。大雑把な振る舞いが知りたいだけなら、微分方程式を解かずに、ラフな見積もりで概略を理解することは可能だ。また物理的に解釈するためには、ラフな見積もりから、現象の根幹となる要素の当たりをつけることも多い。先に触れた次元解析もその種の一例である。ここではふたたび、概算とオーダー評価について、いくつかの例を眺めておく。

オーダー評価

熱伝導方程式は、物質の温度を $T(x, t)$ として、

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

と表された。ただしここで、 K [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$] は温度伝導率である。

高温の溶岩（たとえば、温度 1000K）が海水中に流れ込んで急冷する現象を考えてみよう。溶岩の温度伝導率は、溶岩の熱伝導率を κ 、密度を ρ 、比熱を C_p として、以下ぐらいとなる。

$$\kappa = 1 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$\rho = 2.5 \text{ g cm}^{-3}$$

$$C_p = 1 \text{ J g}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$K = \frac{\kappa}{\rho C_p} \sim 4 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} = 4 \times 10^{-3} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$$

溶岩が冷える途中の温度分布や温度変化などの細かい過程を知りたいければ、偏微分方程式を数値的に解かないとまらない。しかし、冷却時間のおおざっぱな見積もりならば、冷却時間を τ 、溶岩のサイズを L として、偏微分方程式を、

$$\frac{T}{\tau} \approx K \frac{T}{L^2}$$

のような代数式に置き換えて、**オーダー評価**する。この代数式を変形すると、溶岩の温度に無関係に、冷却時間は以下ぐらいだと見積もれる。

$$\tau \approx \frac{L^2}{K}$$

たとえば、 $L=10\text{cm}$ のとき、 $\tau=2500\text{s}=40\text{min}$ となる。

概算 rough estimation

オーダー評価 order evaluation



枕状溶岩（20110919 屋久島）

溶岩が海水中で急冷すると、枕を積み重ねたような状態になり、枕状溶岩と呼ばれる。

▼地球大気の厚さ

地球大気の静水圧平衡の式をオーダー評価すると、大気の厚さが見積もれる。

封筒裏の計算

次元解析やオーダー評価なども含め、ちょっとした**手計算**で、物理量の見積もりや概算をすることを**封筒裏の計算**と呼ぶことがある。

経験的に感じていると思うが、雨のときよりも霧や霏のときの方が、視界が悪くて遠方の見通しがきかない。封筒裏の計算で示してみよう。

Q 雨より霧の方が視界が悪いのはなぜ？

まず大前提として、ある体積内の水の総量（総体積）は、雨でも霧でも変わらないとしよう。その体積内に、半径 r_{rain} の雨粒が N_{rain} 個あれば、雨の総量は、 $V_{\text{rain}} = N_{\text{rain}} (4\pi/3) r_{\text{rain}}^3$ になる。同様に、半径 r_{fog} の霧粒が N_{fog} 個あれば、霧の総量は、 $V_{\text{fog}} = N_{\text{fog}} (4\pi/3) r_{\text{fog}}^3$ になる。これらは等しいと仮定したので、以下が成り立つ。

$$N_{\text{rain}} r_{\text{rain}}^3 = N_{\text{fog}} r_{\text{fog}}^3$$

一方、見通しの悪さは、水滴が視野を遮る面積に比例するはずだが、視線方向で水滴が重ならないとすると、雨粒の総面積は、 $S_{\text{rain}} = N_{\text{rain}} \pi r_{\text{rain}}^2$ になり、霧の場合は、 $S_{\text{fog}} = N_{\text{fog}} \pi r_{\text{fog}}^2$ になる。これらの比は、以下となる。

$$S_{\text{fog}} / S_{\text{rain}} = N_{\text{fog}} r_{\text{fog}}^2 / N_{\text{rain}} r_{\text{rain}}^2$$

最初の式を用いて、個数の比を消去すると、最終的に、

$$S_{\text{fog}} / S_{\text{rain}} = r_{\text{rain}} / r_{\text{fog}}$$

という関係が得られる。すなわち、雨粒より霧の水滴の半径が小さければ、その割合に反比例して、水滴が視野を遮る総面積は広くなるのである。

以上の導出は、体積や面積だけの単純な掛け算や比だけなので、広告の裏紙にでも簡単に手計算できる。しかし、このような簡単な計算でも、結果として、定量的な関係も含め、正しく見積もりができています。

Homework:

以下の見積もりから、単細胞生物が大きくなれない理由を考察してみよ。

細胞はその活動に応じてエネルギーを消費し発熱する。細胞の温度を T 、比熱を C と置くと、細胞の単位質量当たりの発熱量 Q [J/kg/s] は、 Q [J/kg/s] $= CT$ ほどになる。細胞の大きさを a とすると、密度はほぼ 1 なので、細胞全体での発熱量 QM [J/s] は、だいたい QM [J/s] $= Qa^3 = CTa^3$ になる。

一方、発生した熱は細胞表面から放熱しないとイケない。赤外線放射で放熱するならば、ステファンボルツマンの法則から、単位面積当たりの放熱量 L [J/m²/s] は、 L [J/m²/s] $= \sigma T^4$ になる。したがって、細胞表面全体での放熱量 LS [J/s] は表面積を掛けて、 LS [J/s] $= La^2 = \sigma T^4 a^2$ ほどになる。

発熱と放熱は釣り合わないといけなくて、

$$CTa^3 = \sigma T^4 a^2 \rightarrow a / T^3 \sim \text{一定}$$

という関係が得られる。細胞が大きくなると、必然的に高温になる。

封筒裏の計算

back-of-the-envelope calculation

▼多少違うが一般的な見積もり

多少違うが基本的には同じ考えによる見積もりも示してみよう。

水滴の半径を r 、体積を V 、断面積を S 、単位体積内の個数密度を n 、そして見通せる距離を l とする。

このとき、

$$nS l = 1$$

という式は、水滴の断面積 S で長さ l の円筒内に含まれる水滴の個数が 1 個ということを意味している。言い換えれば、見通せる距離 l は、

$$l = 1 / (nS)$$

で決まることがわかる。

さて、水滴の個数密度は、総量を 1 個の水滴の体積 V で割って得られるが、水滴の体積は半径 r の 3 乗に比例するので、個数密度は r の 3 乗に反比例する。一方、断面積 S は r の 2 乗に比例する。結果、見通せる距離 l は、水滴の半径 r に比例して決まることがわかる。

たとえば、大粒の雨（半径 1mm）のときの見通し距離が 600m なら、同じ総量で、霧（半径 0.01m）になると、見通し距離は 6m に落ちる。

フェルミ推定

さらに、封筒裏の計算の最強例として、**フェルミ推定**と呼ばれるものもある。ここまで紹介したオーダー評価や封筒裏の計算例では、それなりに見積もりを行うベースがあった。一方、見かけ上は見積もりの見当すら難しいような問題を、適切な要素に分解し、それぞれの要素の下限値や上限値を見積もり、科学的な推論によって、もとの問題をある程度は推定する方法が、物理学者エンリコ・フェルミが得意としたフェルミ推定である。

フェルミ自身がシカゴ大学の学生に出題した問題を考えてみよう。

Q シカゴにピアノの調律師は何人いるか？

まず、問題をいくつかの要素にわけてみよう。

関係しそうな要素としては、ピアノの台数、必要な調律回数、調律師の仕事量などが考えられる。このうち、ピアノの台数は、一家にあってもせいぜい一台だろうから、世帯数と保有率で決まるだろう（学校や教会にもあるはずだが、簡単のために省略する）。前者の世帯数は、シカゴの人口と世帯の平均人数にわけられる。そこで下記のように数値を置いてみる。

	下限	上限	中央
シカゴの人口	100 万人	1000 万人	300 万人
世帯の平均人数	2 人	5 人	3 人
▽世帯数	20 万	500 万	100 万
ピアノの保有率	0.05	0.5	0.1
▽ピアノの総数	1 万台	250 万台	10 万台
ピアノ 1 台で必要な年間の調律回数			
	0.5 回	1 回	1 回
▼年間の調律総数	5000 回	250 万回	10 万回
調律師 1 人が 1 日の調律するピアノの台数			
	1 台	3 台	2 台
調律師が年間に働く日数			
	200 日	300 日	250 日
■調律師 1 人が年間に調律するピアノの台数			
	200 台	900 台	500 台
年間の調律総数▼を台数■で割ると、調律師の人数として、			
	1 万人	10 人	200 人

となって、シカゴに居るピアノの調律師は、最低でも 10 人、最大で 1 万人を超えることはなく、おそらくは 200 人のオーダーだろうと推定できた。

フェルミ推定 Fermi estimate

そもそも、封筒裏の計算も、フェルミに由来する。

▼フェルミ問題の例

- ・シカゴにピアノの調律師は何人いるか？
- ・日本全国に電柱は何本あるか？
- ・東京都にマンホールはいくつあるか？
- ・長野に蕎麦屋は何軒くらいあるか？
- ・京都市に飼い猫は何匹いるか？



11 科学光学機器の基礎

Questions today

光の性質を挙げてみよ？

レンズと鏡のはたらきは？

レンズの公式とは？

顕微鏡と望遠鏡の取り扱いとは？

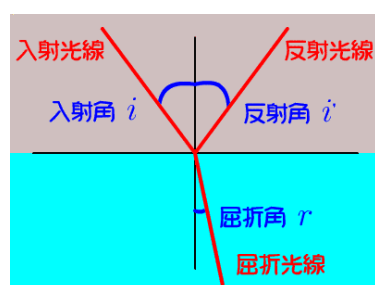
科学ではさまざまな器具を用いて各種の測定や実験を行う。物差しに始まり、時計、秤、プリズム、レンズ、試験管、ビーカー、ピペット、メスシリンダー、シャーレ、アルコールランプ、バーナー、顕微鏡、照度計、望遠鏡などなど、枚挙にいとまがない。これらの器具の取り扱い方法は実験や観察実習で習うはずだが、時間的な制約などもあり、なかなか器具の働きや原理までは教えられないことが多いだろう。そこで、ここでは、光学機器について、光学の基礎から器具の原理まで、ごく簡単に触れておきたい。

光の性質（法則）

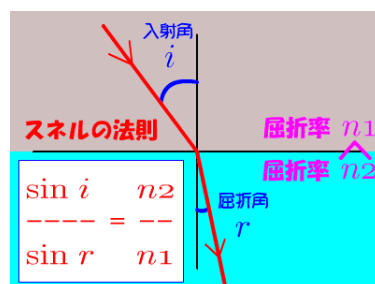
〔直進の法則〕 光線は一樣な媒質中では直進する

〔反射の法則〕 光線は媒質の境界面で反射される。反射の際、入射角と反射角は等しい。

〔屈折の法則〕 光線は境界面を通過するときに屈折する。屈折の際、入射角と屈折角の間にはスネルの法則が成り立つ。



入射角、反射角、屈折角



スネルの法則

測定器具 measuring instrument

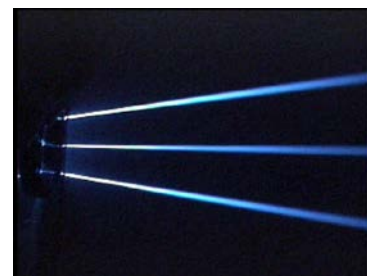
実験器具 laboratory instrument

観測装置 observational equipment

▼光の3法則

直進の法則、反射の法則、屈折の法則は、古代アレキサンドリアの古くから知られており、光の3法則と呼ばれる。

光の3法則 3 law of light



直進するレーザー光線

反射 reflection

屈折 refraction

入射角 incident angle

反射角 angle of reflection

屈折角 angle of refraction

スネルの法則 Snell's law

入射角を i 、屈折角を r 、屈折前の媒質の屈折率を n_1 、屈折後の媒質の屈折率を n_2 と置くと、スネルの法則は一般形で以下となる。

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}$$

とくに、空気中から液体中への入射の場合は、空気の屈折率はほぼ 1 なので、液体（たとえば水）の屈折率を n と置くと、下記となる。

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n$$

〔分散〕 屈折率の異なる媒質に光が入射するとき、波長によって屈折率が少しずつ違うために、光（白色光）はいろいろな色光に分解される。これを光の分散と呼ぶ。分散を利用した器具がプリズムである。また虹も分散で生じる。

〔回折〕 光線の進路が微小な角などで曲げられ回り込む現象を、光の回折と呼ぶ。回折の度合いは光の波長によって違う。回折を利用して光をスペクトルに分解する器具が回折格子である。

〔干渉〕 光線は薄膜で反射するときや、近接スリットを通過するときに、光同士が強め合ったり弱め合ったり、さらには色が着いたりする現象を、光の干渉と呼ぶ。シャボン玉や油膜の色は光の干渉で生じる。



プリズム



直視分光器

▼光の波動的性質

分散、回折、干渉は、光が波として振る舞うときに現れる性質である。

分散 dispersion

回折 diffraction

干渉 interference



分散の例



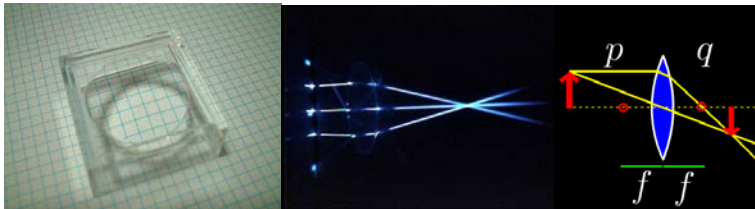
回折の例



干渉の例

レンズと鏡、レンズの公式

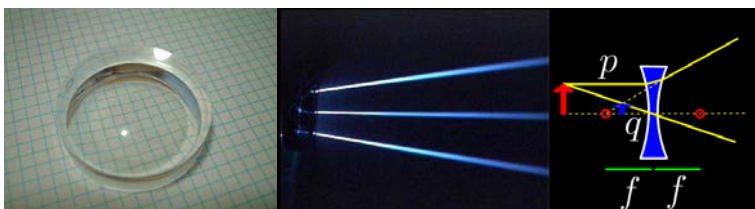
〔凸レンズ〕 周囲に比べて中央が膨らんだレンズ：像は倒立実像



物体と凸レンズの距離 p (>0)、像と凸レンズの距離 q (>0)、焦点距離 f

$$\text{レンズの公式} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}; \quad p > 0, q > 0, f > 0 \quad q > 0$$

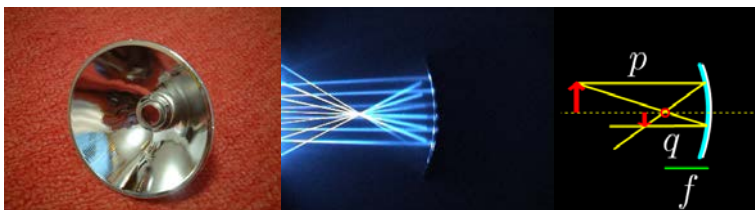
〔凹レンズ〕 周囲に比べて中央がへこんだレンズ：像は正立虚像



物体と凹レンズの距離 p (>0)、像と凹レンズの距離 q (<0)、焦点距離 f

$$\text{レンズの公式} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}; \quad p > 0, q < 0, f > 0 \quad q < 0$$

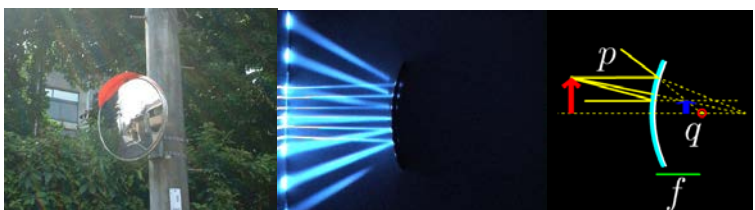
〔凹面鏡〕 周囲に比べて中央がへこんだ鏡：像は倒立実像



物体と凹面鏡の距離 p (>0)、像と凹面鏡の距離 q (>0)、焦点距離 f

$$\text{レンズの公式} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}; \quad p > 0, q > 0, f > 0 \quad q > 0$$

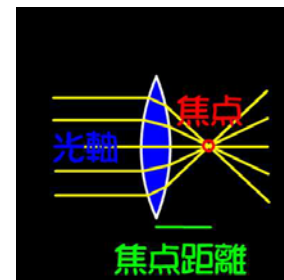
〔凸面鏡〕 周囲に比べて中央が膨らんだ鏡：像は正立虚像



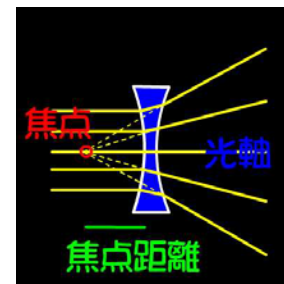
物体と凸面鏡の距離 p (>0)、像と凸面鏡の距離 q (<0)、焦点距離 f

$$\text{レンズの公式} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}; \quad p > 0, q < 0, f > 0 \quad q < 0$$

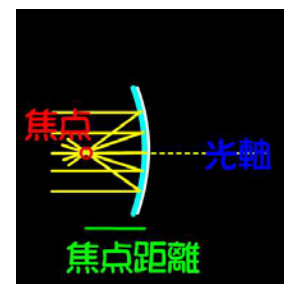
凸レンズ convex lens



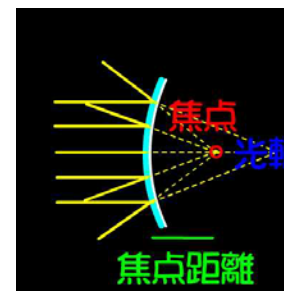
凹レンズ concave lens



凹面鏡 concave mirror



凸面鏡 convex mirror



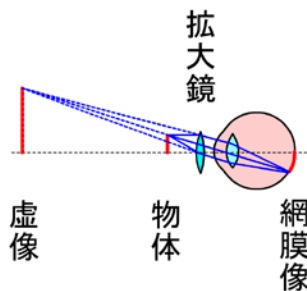
Exercise/Homework/Report: 像の作図

凸レンズ、凹レンズ、凹面鏡、凸面鏡のそれぞれで、像を作図してみよ。

光学機器：虫眼鏡、顕微鏡、望遠鏡

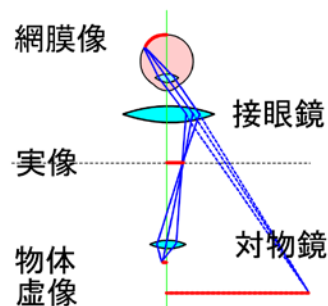
顕微鏡や望遠鏡は、レンズや鏡を組み合わせる光を導く光学機器だが、レンズ・鏡による結像に加えて、観察者の眼による結像も必要なため、像をみる仕組みは予想外に複雑になる。以下、光線の経路を示しておく。

〔虫眼鏡〕 単レンズを用いたもっとも単純な光学装置



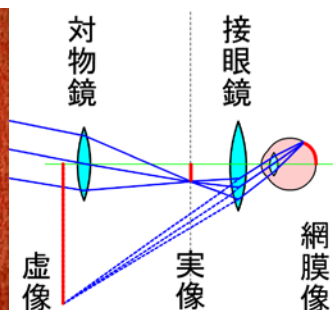
虫眼鏡 magnifying glass

〔顕微鏡〕 小さなモノを拡大してみる光学装置



顕微鏡 microscope

〔望遠鏡〕 遠くのモノを拡大してみる光学装置



望遠鏡 telescope

瞳 pupil

虹彩 iris



Homework/Report: 機器の取り扱い

顕微鏡の取り扱い上の注意点をまとめよ。

望遠鏡の取り扱い上の注意点をまとめよ。

光学的性能

光学機器は、用いたレンズなどの物理的制約によって、性能が決まる（制限がある）。以下、望遠鏡を例に取り、いくつかの光学的性能を説明する。

【口径 D 】 屈折望遠鏡の対物レンズや反射望遠鏡の主鏡の直径。口径が大きいほど集光力が高く、望遠鏡の性能の大部分は口径で決まる。

【集光力】 望遠鏡が肉眼の何倍の光を集めることができるかという値。対物鏡の面積と肉眼の瞳（直径 7mm）の面積の比で与えられる。

【分解能 θ 】 2 つの物体を見分けることができる最小の角距離（角度でどれだけ離れているか）。分解能 θ [rad] は観測波長と対物鏡の口径だけで決まり、観測波長 λ [cm] に比例し、対物鏡の口径 D [cm] に反比例する。

$$\theta = \frac{\lambda}{D}$$

【焦点距離 f 】 レンズあるいは反射鏡と天体の実像の間の距離。焦点距離が長いほど大きな実像が得られる。

【口径比・F 数 F 】 対物鏡の焦点距離 f を口径 D で割ったもの。実像の単位面積あたりの明るさは F 数の 2 乗に反比例するので、 F 数が小さいほど明るい光学系という。

$$F = \frac{f}{D}$$

【倍率 m 】 肉眼で見た天体の見かけの大きさと、望遠鏡を通して見た見かけの大きさの比。対物鏡による実像の大きさは対物鏡の焦点距離に比例し、接眼鏡による拡大率は接眼鏡の焦点距離に反比例するので、倍率 m は、対物鏡の焦点距離 f_{obs} を接眼鏡の焦点距離 f_{eye} で割ったものになる。

$$m = \frac{f_{\text{obs}}}{f_{\text{eye}}}$$

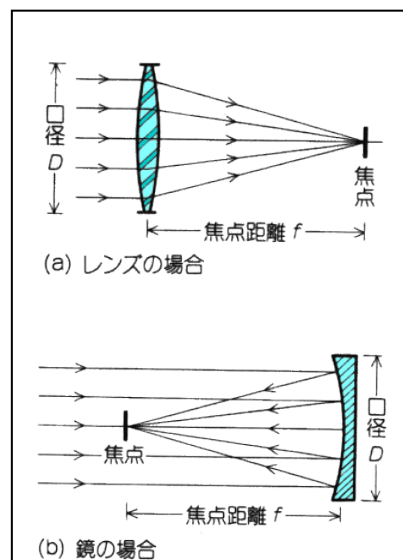
Exercise: 口径と分解能

いろいろな望遠鏡の分解能と“視力”を求めよ。

	口径 D	分解能 θ	相当視力
瞳	0.7 cm	0.3'	3
小型望遠鏡	10 cm	1"	60
大阪教育大学望遠鏡	51 cm	0.24"	250
すばる望遠鏡	8 m	0.016"	4000

見かけの大きさが 1' の物体を見分ける視力が 1 である。

分解能の単位は、角度の分（'）および角度の秒（"）



▼主鏡

望遠鏡の場合、レンズを使っている、主“鏡”と呼ぶ。

口径 diameter

集光力 light-gathering power

分解能 resolution

▼分解能

空間分解能（角度分解能）以外に、光の波長をどこまで細かく分解できるかという波長分解能や、時間的な変化をどこまで細かく分解できるかという時間分解能もある。

焦点距離 focal length

倍率 magnification

▼適正倍率

倍率を上げていくと、分解能による限界を超えると像がぼやけてしまう。また単位面積当たりの光線が減るため、輝度が下がって暗くなる。光学機器の分解能（口径）に応じて、適正な倍率の範囲がある。

12 科学的な表現

Questions today

文字の書体(フォント)とは？

レポートや論文の組み立て方は？

読み書き力の最後に、読み書き力と対である表現力、とくに科学的な表現方法やプレゼンテーションについて、いくつか注意しておきたい。

話法

★話★ うまい方がいい

【話の流れ】

- ・序破急のリズムで、ツカミ（序）、何が目的か（破）、まとめ（急）を。

【口頭発表】

- ・相手の目を見ながら、全体のようなすを眺めながら
- ・滑舌をよく
- ・早口は×（プロの話し方…一定のスピード）

書法

★字★ 綺麗な方がいい

【書体・字体・フォント】

- ・日本語の書体：明朝体、ゴシック体
- ・英語のフォント：ローマン体（立体）、イタリック体（斜体）、ゴシック体（太字）以外に、サンセリフ、花文字、など多数ある

【文体】

- ・ですます調、である調、そのハイブリッド
- ・句読点を（、）とするか（.,）にするか
- ・新井素子風、ラノベ風…

【日本語の力】

・日本語は、表意文字の漢字、表音文字の和語（ひらかな、カタカナ）さらに英語のアルファベットまで、多種多様な文字種を使って、非常に豊富な表現が可能な希有な言語である。たとえば、英語は大文字小文字合わせても 52 文字しか使えないが、日本語は表音文字の仮名だけでも、濁音や促音を含めれば英語の 3 倍くらいの文字がある。さらに、通常は漢字も 2000 字ぐらゐは使えるだろう。書に際しては、この日本語の力を最大限に活かすのが重要なポイントになる。そのためには、まず、読んで読んで読みまくり、書いて書いて書きまくるのが、最短の一步である。

字は綺麗に書けるに越したことはないが、字の上手下手は、音楽や絵と同じく才能に依存する。ぼくのように字が下手な人間はつらいものもあるが。

書体・字体・フォント font

明朝体 Mincho

ゴシック体 Gothic

ローマン体 Roman

イタリック体 Italic

ゴシック体 Gothic

サンセリフ体 Sanseliff

スク립ト体（筆記体） Script

文体 style

文字種や文法が日本語非ネイティブにとっては日本語の学びにくさの主因だが、ここは（マンガ文化と合わせ）日本語ネイティブに生まれた幸運に感謝したい。

【文、段落、文章】

- ・一文の長さはできるだけ短くする
- ・ただしブツ切りの文を並べずに、丁寧に接続詞でつなぐ
- ・適当に改行して段落としない。関連のある文を並べて段落とする。

日本語のスタイル 最後に結論；それまではいろいろな説明

英語のスタイル 最初に結論(テーマ)；後で理由付けや説明

【文のタイプ】

- ・事実、
- ・推論、
- ・意見、
- ・感想、
- ・想像、
- ・創作

科学的な論文で用いる文タイプは、基本的に、事実と事実から論理的に導かれる推論のみである。意見や主張や感想は通常は書くことはなく、想像や創作は科学的な文章では改竄または捏造と呼ばれる。

【レジメ】

ゼミの発表などで使用する A4 で 2 枚程度の短いまとめがレジメ。

- ・冒頭に、タイトル、発表者名、発表日を必ず明記すること
- ・末尾に参考文献を明記すること

【レポート】

演習や実験など実習内容を提出するための報告文がレポート。

標準的なレポートは、冒頭にタイトルや著者名を記し、

- 1 目的
- 2 方法
- 3 結果
- 4 議論

で構成する。もちろん最後には参考文献を過不足なく入れる。

【論文】

研究成果を学術誌で公表するための正式な文章が(科学)論文。その分野の現状をレビューした総説記事、新しい知見を報告する原著論文、短いレター論文などがある。

標準的な論文は、タイトル・著者名・所属組織名を記し、

abstract (概要)

1 Introduction 動機、先行研究について

2 Observation/Model/Method → 観測方法、理論的モデル、実験

3 Results 結果 (新しく得られたこと知見)

4 Discussion

5 Conclusion

References 参考文献

で構成する。

Exercise: 事実と感想

夕日の写真を見て、事実と感想を述べよ。

文 sentence

段落 paragraph

文章 writing

▼段落の構成と文の順序

最初に結論を書く英語の場合、よい文章では、各段落の最初の文を続けていけば、結論だけをまとめたアブストラクトとして読める構成になっている。逆に、最後に結論を書く日本語のスタイルでも、各段落の最後の文を繋げると全体の概要になっているのが、よい科学文章構成だろう。

事実 fact

推論 inference

意見 opinion

感想 impressions

想像 imagination

創作 creation

レジメ resume

レポート report

論文 paper

総説記事 review

少し長い原著論文 article

通常の原著論文 paper

短い原著論文 letter

アブストラクト・概要 abstract

はじめに introduction

方法 method

結果 results

議論 discussion

結論 conclusion

参考文献 references

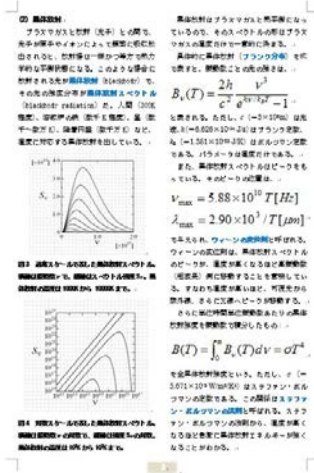
【ワープロソフト】

ワード：フォントが悪く欠点が多いが、デフォルトになってしまった

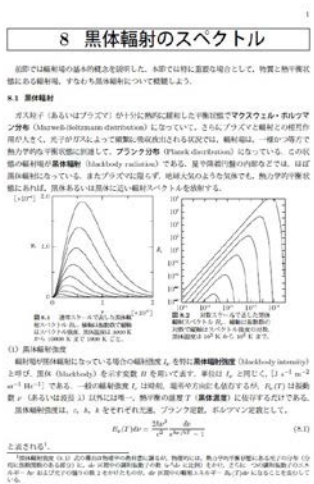
一太郎：フォントが綺麗で変換もよいが、使用者は減った

LaTeX：数式などを美麗にレイアウトする、上級向けソフト

エディタ：レイアウトは組めないが、文字入力できる簡易ソフト



ワードの画面イメージとフォント



LaTeXの画面イメージとフォント

【ブラインドタッチ】

手書きのレポートは別として、多くの場合は、文章をパソコンなどのキーボードで入力するだろう。手元のキーボードを見ずに入力する作法：**ブラインドタッチ**（タッチタイピング）を身に付けければ、（一本指の場合の）通常の3倍どころか、10倍20倍の速度で入力できるようになる。文章を考えながら、あるいはモニタの横の原稿を見ながら入力できるので、文章を書くスピードが格段に向上する。

一週間の特訓で身に付くので、是非、チャレンジして欲しい。

▼文字コード

SHIFT-JIS

UTF-8

▼エディタ

秀丸

TeraPad

Notepad

ているので、そのスペクトルの形はブ
マガスの温度だけで一意的に決まる。

具体的に黒体放射（**プランク分布**）
で表すと、振動数ごとの光の強さは、

$$B_\nu(T) = \frac{2h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

と表される。ただし、 c （ $=3 \times 10^8 \text{m/s}$ ）
速、 h （ $=6.626 \times 10^{-34} \text{J/s}$ ）はプランク定

ている場合の輻射強度 I_ν を特に**黒体輻射**
を示す変数 B を用いて表す。単位
の輻射強度 I_ν は時刻、場所や方向にも
外には唯一、熱平衡の温度 T （黒体温
 k をそれぞれ光速、プランク定数、ボ

$$B_\nu(T) d\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{d\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

は物理学の教科書に譲るが、物理的には、熱力
区間中の調和振動子の数（ $\nu^2 d\nu$ に比例）をか

ブラインドタッチ touch typing
（ブラインドタッチは和製英語）

▼キーボード配列

標準的なキー配列は、英字最上段の
左から、QWERTY と並ぶので QWERTY（ク
ウォーティー）配列と呼ぶ。昔のタイ
プライターは打鍵に連動して槌子の
原理でアームが回転し印字していた。
キーを叩く速度が速すぎるとアーム
が絡んでしまうため、わざとややこし
い配列にして打鍵速度を落としたと
いうのが通説。

画法

★絵★ 上手な方がいい

【絵・図・写真の重要性】

- ・小説など物語なら別だが、文章だけのレポートは読む気にならない
- ・視覚的なインパクトが大きい（着色もポイント）
- ・「百聞は一見にしかず」に尽きるが
- ・絵の情報量は文字よりも桁で大きい（着色すると数十倍増し）
- ・絵を有効的に使うと◎

【画像の種類】

- ・説明図、イラスト：ちゃんとした絵があると内容を読みたくなる
- ・グラフ、3D グラフ：結果を定量的に表す
- ・写真：コントラストのあるわかりやすいものに

【図の割合】

- ・レジメ：見開きの場合、1/3～1/2 ぐらいは図に
- ・レポート：1 頁か2 頁に1 枚程度は図を入れる

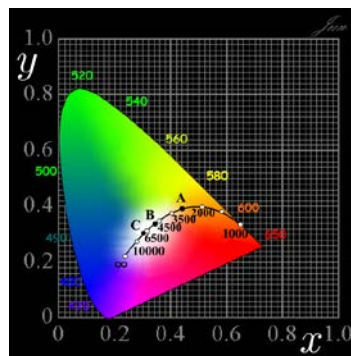
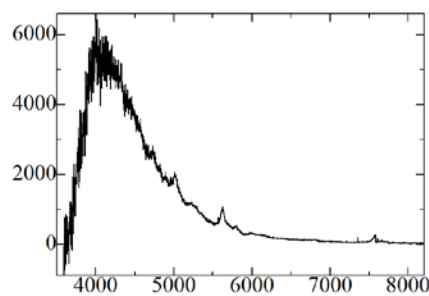
【お絵かきソフト】

Paint 系(ぬり絵) Photoshop, PaintShop ⇒ 拡大すると粗くなる

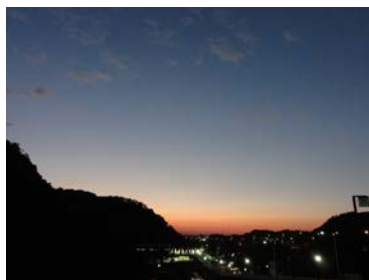
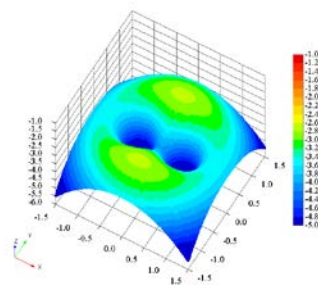
Draw 系(線をかく) Flash, Illustrator ⇒ 拡大しても粗くならない

Sma4win 2次元のグラフ

Graph-R 3次元のグラフ



イラストの例（イラレで作成）、グラフの例（Sma4Winで作成）、グラフの例（Flashで作成）



3D グラフの例（Graph-Rで作成）、写真の例（paintshopで加工）

▼グラフの英語

グラフの表題 graph title

原点 origin

枠 frame

横軸 x(horizontal)-axis, abscissa

縦軸 y(vertical)-axis, ordinate

軸の名前 axis label

データ点 data point

実線 solid line/curve

破線 dashed line/curve

点線 dotted line/curve

一点鎖線 dash-dotted line, chain
dotted line

太線 thick line/curve

細線 thin line/curve

太い実線 thick solid line

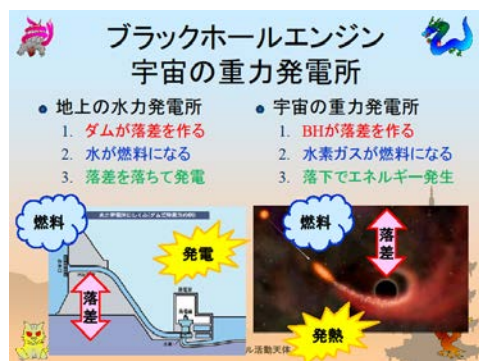
細い破線 thin dashed line

算法

★プログラミング★ 必要なときに覚えればよい

プレゼンテーション（パワーポイントの場合）

- ・文章のみ××× ママ見るが、最悪のパターン
(演示中に読めないし、そもそもパワポにする意味がない)
- ・説明文は必ず（1行ごとぐらいの）箇条書きで
- ・絵や画像 できるだけカラーで、また動画も利用
- ・アニメーション…ここぞというところだけに使い、多用しない
(インパクトが薄れるし、時間も無駄)
- ・各頁に図を入れて、その説明文を入れるぐらいの気持ちで



パワポの例（ブラックホール活動天体入門）



パワポの例（研究室紹介パンフレットなので、こちらは字が多い）

▼算譜の例

```
Open "test.txt" for create as #1
for x=0 to 100
  y=sin(x)
  print #1, x, y
next x
close
```

▼算譜の例

```
Open "test.cvs" for create as #2
print #2, "データ形式, 2"
for y=0 to 100
  for x=0 to 100
    z=sin(100*x)*cos(100*y)
    print #2, x, y, z
  next x
next y
close
```

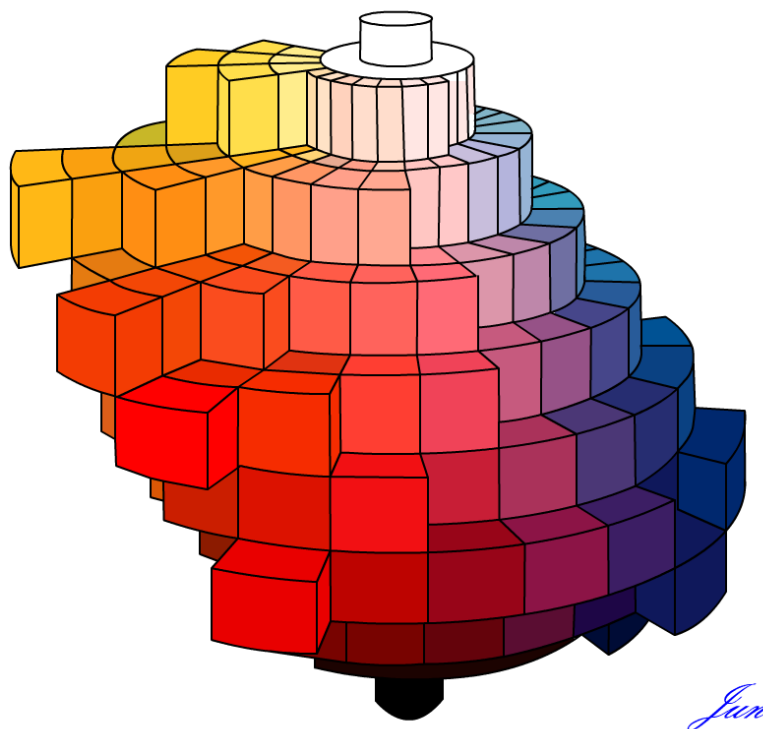
Presentation: 実践編

小学校4年生または中学校2年生を対象に、下記の現象を説明せよ。

- ・虹
- ・スペクトル
- ・時間の遅れ
- ・その他、自然現象

- 1) 現象自体の説明と、その仕組みの説明をすること
- 2) 手書きの説明図、自作のグラフ・写真を3枚以上使うこと。
- 3) 口頭発表の場合は10分が目安、レポート／レジメはA4で2枚程度
- 4) 1～3人以内でのグループ活動はOK

おまけ：色立体



SI単位

物理量	単位	記号	数値
時間	秒	s	
	年	yr	3.16×10^7 s
長さ	メートル	m	10^{-3} cm
	ナノメートル	nm	10^{-9} m
	天文単位	au	1.45×10^{11} m
	光年	ly	9.46×10^{15} m
	パーセク	pc	3.09×10^{16} m
質量	キログラム	kg	10^{-3} g
平面角	ラジアン	rad	$57^\circ 17' 44''$
	度	$^\circ$	$\pi/180$ rad
振動数	ヘルツ	Hz	1 s $^{-1}$
力	ニュートン	N	1 kg m s $^{-2}$
	ダイン	dyn	10^{-5} N
圧力	パスカル	Pa	1 N m $^{-2}$
エネルギー	ジュール	J	1 N m
	エルグ	erg	10^{-7} J
仕事率	ワット	W	1 J s $^{-1}$
温度	ケルビン	K	$273.15 + ^\circ\text{C}$

SI接頭語 ギリシャ文字

接頭辞	記号	値
ヨッタ	Y	10^{24}
ゼッタ	Z	10^{21}
エクサ	E	10^{18}
ペタ	P	10^{15}
テラ	T	10^{12}
ギガ	G	10^9
メガ	M	10^6
キロ	k	10^3
ヘクト	h	10^2
デカ	D	10
デシ	d	10^{-1}
センチ	c	10^{-2}
ミリ	m	10^{-3}
マイクロ	μ	10^{-6}
ナノ	n	10^{-9}
ピコ	p	10^{-12}
フェムト	f	10^{-15}
アット	a	10^{-18}
zepto	z	10^{-21}
ヨクト	y	10^{-24}

大	小	読み方
A	α	アルファ
B	β	ベータ
Γ	γ	ガンマ
Δ	δ	デルタ
E	ϵ	イプシロン
Z	ζ	ゼータ
H	η	エータ
Θ	θ	シータ
I	ι	イオタ
K	κ	カッパ
Λ	λ	ラムダ
M	μ	ミュー
N	ν	ニュー
Ξ	ξ	クシー
O	$\omicron$	オミクロン
Π	π	パイ
P	ρ	ロー
Σ	σ	シグマ
T	τ	タウ
Υ	υ	ウプシロン
Φ	ϕ	ファイ
χ	χ	カイ
Ψ	ψ	プサイ
Ω	ω	オメガ

基礎物理天文定数

名称	記号	数値
真空中の光速	c	3.00×10^8 m s $^{-1}$
万有引力定数	G	6.67×10^{-11} N m 2 kg $^{-2}$
プランク定数	h	6.63×10^{-34} J s
ボルツマン定数	k	1.38×10^{-23} J K $^{-1}$
陽子の質量	m_p	1.67×10^{-27} kg
電子の質量	m_e	9.11×10^{-31} kg
ボーア半径	a_0	5.29×10^{-11} m
古典電子半径	r_e	2.82×10^{-15} m
アボガドロ数	N_A	6.02×10^{23} mol $^{-1}$
気体定数	R	8.31 J mol $^{-1}$ K $^{-1}$
ステファン・ボルツマン定数	σ	5.67×10^{-8} W m $^{-2}$ K $^{-4}$

名称	記号	数値
地球赤道半径	$R_\oplus$	6378 km
地球質量	$M_\oplus$	5.97×10^{24} kg
地球平均密度	$\rho_\oplus$	5.52 g cm $^{-3}$
太陽赤道半径	$R_\odot$	69 6000 km
太陽質量	$M_\odot$	1.99×10^{30} kg
太陽平均密度	$\rho_\odot$	1.41 g cm $^{-3}$
太陽光度	$L_\odot$	3.85×10^{26} W
太陽有効温度	T_{eff}	5780 K
太陽定数		1.37 kW m $^{-2}$

Astronomical Institute, Osaka Kyoiku University; contact to: Jun Fukue (fukue@cc.osaka-kyoiku.ac.jp)